



**UM MODELO DE INTERVENÇÃO DIDÁTICA PARA A CONSTRUÇÃO DO
CONCEITO DE DENSIDADE DOS RACIONAIS NO CONJUNTO DOS
NÚMEROS REAIS**

Ion Moutinho
Universidade Federal Fluminense
ion.moutinho@gmail.com

Alan Silva dos Santos
alan.objetivo@gmail.com

Resumo:

Este é um estudo sobre um modelo de intervenção didática, com base em recursos de geometria dinâmica, para construção do conceito de densidade dos números racionais na reta numérica. Foi realizada uma experiência didática com alunos do Ensino Médio mediada com a ajuda de cenários virtuais de aprendizagem e um modelo de estudo dirigido, baseado no papel dos sistemas de representação semiótica para o ensino/aprendizagem de conhecimentos matemáticos, que pode servir para a construção da propriedade de densidade e também para avaliação do desempenho de um estudante. Os cenários virtuais são interativos e permitem um aluno experimentar e conjecturar. Na experiência, os alunos realizaram as tarefas solicitadas com bastante autonomia, cada um em seu ritmo e aprendendo com seus erros. Conseguiram realizar representações no sistema de representação semiótica dos cenários, tratar as representações obtidas e efetuar conversões entre outros sistemas de representação.

Palavras-chave: densidade dos números racionais no conjunto dos números reais; sistema de representação semiótica; construção de conhecimento matemático.

1. Introdução

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) apresentam orientações com relação à escolha de tópicos de estudo: “a seleção e organização de conteúdos deve levar em conta sua relevância social e sua contribuição para o desenvolvimento intelectual do aluno [...]”

(BRASIL, 1998, p. 57). Em particular, encontramos referência à questão da aproximação numérica, questão esta que envolve a noção de densidade.

O ensino do conhecimento relacionado com a densidade dos números racionais no conjunto dos reais, assim como com a densidade dos números irracionais no conjunto dos reais, já foi objeto de pesquisa de alguns estudos nacionais. As pesquisas de Soares, Ferreira e Moreira (1999), Iglioni e Silva (2001), Dias (2002), Boff (2006), Santos (2007), Penteado e Silva (2010), Bartolomeu (2010), Medeiros (2010) e Souto (2010) indicam a importância do assunto e a falta de conhecimento deste por parte dos alunos, tanto de escola quanto de ensino superior, além de abordagens deficientes em livros didáticos escolares e a necessidade de novas abordagens do assunto.

Em Moutinho (2014) encontramos uma atividade de ensino da propriedade de densidade dos números racionais no conjunto dos números reais. Mais precisamente, encontramos um modelo de cenário virtual de aprendizagem que tem como objetivo estimular a construção do conhecimento desta propriedade de densidade. O presente relato é sobre uma experiência didática com o cenário virtual do artigo sendo utilizado como recurso de mediação, junto com um modelo de estudo dirigido desenvolvido para o ensino de conhecimentos sobre números reais, para a construção de conhecimentos matemáticos sobre a propriedade de densidade dos números racionais no conjunto dos números reais. A experiência foi realizada com alunos do Ensino Médio e assumiu o papel do aluno como construtor de seus conhecimentos, ofereceu um ambiente de exploração, experimentação e de formação de conjecturas, além de fazer uso de diferentes representações dos números e de evitar uma abordagem formal.

2. Fundamentação e Metodologia

A pesquisa é fundamentada em orientações dos PCN (Brasil, 1998) e na teoria de registros de representação semiótica de Duval (2003).

Tanto para o ensino fundamental, quanto para o ensino médio, uma abordagem para o ensino de Matemática deve possibilitar ao aluno participar ativamente do processo de construção de seus conhecimentos. O ensino deste tipo de conhecimento pode se basear em outros métodos, inclusive de caráter indutivo. Deve-se buscar utilizar diferentes representações dos números e evitar uma abordagem formal no início do estudo dos números irracionais. Os recursos das novas tecnologias podem auxiliar no processo de construção de conhecimento, além de servirem como meio para o aluno desenvolver

autonomia, pelo uso de softwares que possibilitem pensar, refletir e criar soluções. Ainda com relação ao uso das novas tecnologias, tudo indica que pode ser um grande aliado do desenvolvimento cognitivo dos alunos, principalmente na medida em que possibilita o desenvolvimento de um trabalho que se adapta a distintos ritmos de aprendizagem e permite que o aluno aprenda com seus erros.

Assumimos o papel dos sistemas de representação semiótica no processo de ensino e aprendizagem de conhecimentos matemáticos, de acordo com a teoria de Duval (2003), e consideramos a noção de *construção do conhecimento em Matemática* que se refere às três ações fundamentais, “de representar os conceitos, de tratar as representações obtidas no registro estabelecido e de converter as representações num registro para outro” (D’AMORE, 2005, p. 63).

O estudo envolve a utilização de alguns cenários interativos do *Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA) para Números Reais*, produto apresentado em Moutinho (2013), e o desenvolvimento de um estudo dirigido baseado na teoria de Duval (2003). Os cenários são cenários virtuais de aprendizagem desenvolvidos no programa GeoGebra, de autoria de Markus Hohenwarter. Eles pertencem a um conjunto de cenários interativos desenvolvidos para o ensino dos números reais e que definem o AVA para Números Reais. Para este estudo, planejamos usar quatro cenários. O sistema de representação utilizado para trabalhar com os números reais se baseia na forma como os gregos lidavam com este conceito e está de acordo com a apresentação encontrada no livro de Courant e Robbins (1941).

O estudo dirigido tem o papel de orientar a construção do conhecimento sobre a propriedade de densidade. Ele se baseia na teoria de Duval (2003) e estimula o aluno a realizar as três ações fundamentais. Contudo, no presente estudo, o estudo dirigido também tem o papel de avaliar se o aluno construiu de fato conhecimentos relacionados com a propriedade de densidade. Assim, a análise da experiência leva em consideração se os alunos conseguiram representar, tratar e realizar conversões, quando necessário, de acordo com as tarefas propostas no estudo dirigido.

Os cenários e o estudo dirigido são apresentados na próxima seção.

A mediação ao longo da experiência procura intervir o mínimo possível, e avalia também se os sujeitos da experiência trabalham com autonomia, dentro do seu ritmo e se aprendem com seus erros.

3. Os cenários virtuais de aprendizagem e o estudo dirigido

O material utilizado para a experiência é composto de quatro cenários virtuais de aprendizagem, os cenários 1, 2, 3 e 4, ilustrados, respectivamente, nas figuras 1, 2, 3 e 4, e de um estudo dirigido, reproduzido na figura 5. Os cenários 1 e 2 foram escolhidos para o aluno conhecer o sistema de representação geométrico para o conceito de conjunto de números reais utilizado e associar este sistema à ideia de grandezas escalares contínuas e de valores numéricos. O cenário 1 permite simular um círculo desenrolando. No cenário 2, é possível mudar a hora no relógio mudando o tamanho do segmento da reta numérica. O cenário 3 permite representar a ideia de parte/todo sobre a reta numérica. O cenário 4 é o principal cenário, é o produto testado nesta pesquisa. Ele permite perceber a propriedade de densidade dos racionais no conjunto dos números reais.

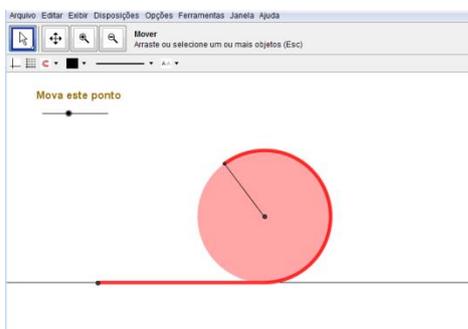


Figura 1.

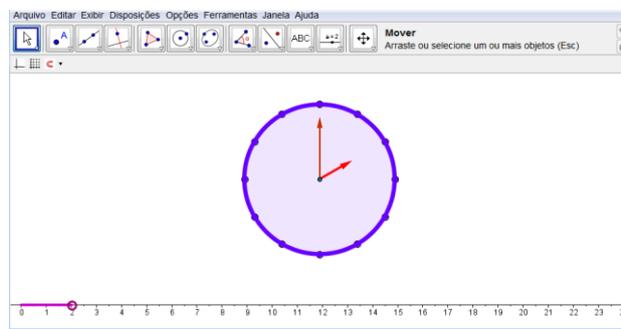


Figura 2.

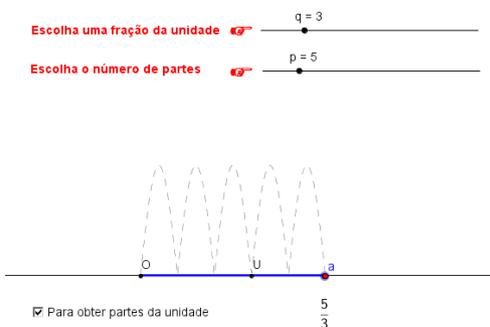


Figura 3.

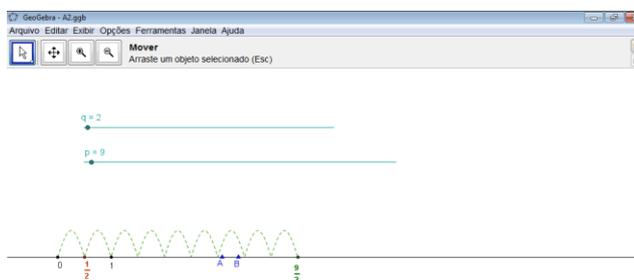


Figura 4.

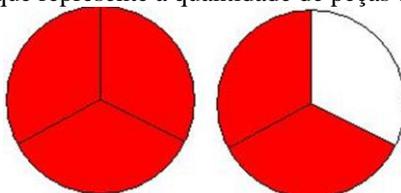
As atividades da figura 5 foram usadas na mediação do estudo. Elas foram elaboradas para que os alunos se ambientassem aos cenários, e à manipulação destes, e entendessem o sistema de representação contido nos cenários como um meio de representar números reais e frações significando a ideia de parte/todo. Elas contêm comandos que exigem realizar representações no sistema de representação semiótica dos cenários, o tratamento das representações obtidas e a conversão entre outros sistemas de representação.

Atividade 1: A representação de grandezas escalares contínuas na reta numérica.

- Você já utilizou a reta numérica como recurso de representação de alguma grandeza escalar contínua? Procure dar exemplos.
- Você acha possível representar o comprimento de um círculo na reta numérica? Pense um pouco e discuta com colegas. Depois, veja o cenário 1.
- Qual é a maneira mais comum de representar o tempo? Você acha possível representar o tempo na reta numérica? Veja o cenário 2.

Atividade 2: A representação de números racionais na reta numérica. Para esta atividade você deve recorrer ao cenário 3. Este cenário exibe um segmento apoiado no ponto O . Veja que o segmento pode mudar de tamanho. O segmento OU representa uma unidade de medida. Vamos fazer o segmento a representar frações da unidade?

- Habilite a caixa do cenário. Veja, então, dois botões deslizantes, q e p . Movas os botões e veja o que acontece no cenário.
- Você consegue representar números inteiros na reta numérica? Qual botão da animação permite realizar esta representação? Qual deve ser o valor de q para que se consiga a representação de números inteiros na reta numérica?
- Como exercício, faça o segmento a coincidir com o valor 3. Escreva os valores que você escolheu para p e q . Mostre o resultado do cenário para seu professor.
- Você consegue representar uma fração da unidade na reta numérica? Qual botão da animação permite realizar esta representação? Qual deve ser o valor de p para que se consiga a representação de frações da unidade na reta numérica?
- Como exercício, faça o segmento a coincidir com a fração $\frac{1}{4}$. Escreva os valores que você escolheu para p e q . Mostre o resultado do cenário para seu professor.
- Você consegue encontrar o segmento a que represente a fração $\frac{7}{5}$? Mostre o resultado obtido no cenário para seu professor.
- Obtenha o segmento a que represente a quantidade de peças coloridas da figura a seguir.



- Um número racional foi representado na reta numérica. A representação é dada no final de cinco ondas, sendo que a terceira onda coincide com unidade da reta numérica. Que fração representa tal número? Mostre o resultado obtido no cenário para seu professor.

Atividade 3: Comparando números racionais com pontos da reta numérica. Utilize o cenário 4.

- Posicione o ponto A na reta numérica como desejar. Você é capaz de obter uma representação na reta numérica de um número racional maior do que A ?
- Posicione o ponto B na reta numérica como desejar. Você é capaz de obter uma representação na reta numérica de um número racional menor do que B ?
- Posicione os pontos A e B na reta numérica como desejar, mas com A à esquerda de B . Você é capaz de obter uma representação na reta numérica de um número racional entre A e B ? Não desista logo de cara, tente bastante antes de responder.

Atividade 4: A distribuição dos números racionais na reta numérica. Utilize o cenário 4.

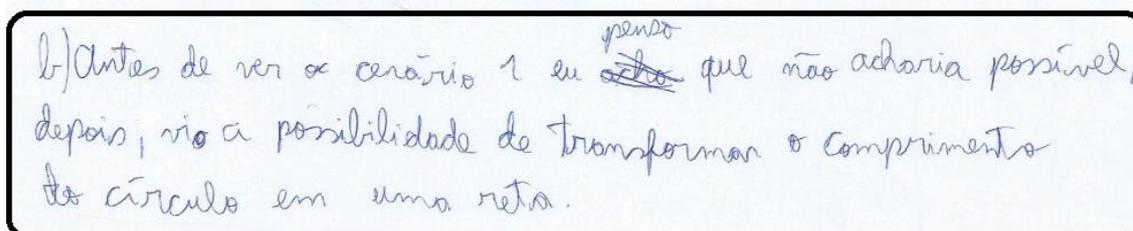
- Posicione os pontos A e B na reta numérica como desejar, mas com A à esquerda de B . Você consegue obter um número racional entre A e B ?
- Se a resposta do item anterior for afirmativa, refaça o item (a), mas mudando a posição de A e de B .
- Você conseguiu encontrar uma posição para A e B de modo que não seja possível obter um número racional entre A e B ?
- Que conclusão você retira desta experiência?

Figura 5. Estudo dirigido utilizado com os sujeitos da pesquisa.

4. Descrição e análise da Experiência

A pesquisa, mediada por um dos autores, Alan Silva dos Santos, foi realizada com 9 alunos de uma turma regular do 2º ano do Ensino Médio, com idade entre 15 e 16 anos, do Instituto Federal de São Paulo, no Campus de Cubatão. A aplicação do estudo dirigido se deu em um estudo extraclasse, em um único encontro de duas horas. Havia um computador para cada três alunos. Todos receberam o estudo dirigido e foram orientados a realizar as tarefas à medida que iam lendo o texto, sendo que um participante por vez executava a tarefa, enquanto os outros aguardavam sua vez.

Na realização da atividade 1 os alunos mostraram boa adaptação e interação com os cenários virtuais e pareceram ter entendido o sistema de representação semiótica dos cenários como um meio de representação de grandezas escalares contínuas e de valores numéricos. Por exemplo, no item (b), três alunos só reconheceram a possibilidade de representar o comprimento de um círculo na reta numérica depois de manipularem o cenário 1.



b) Antes de ver o cenário 1 eu ~~acho~~^{penso} que não acharia possível, depois, vi a possibilidade de transformar o comprimento do círculo em uma reta.

Figura 6. Resposta de um aluno ao item (b) da atividade 1.

A atividade 2 serviu como pretexto para os alunos entenderem o funcionamento do sistema de representação semiótica para o conceito de frações positivas e reta numérica, simultaneamente, oferecido pelo cenário 3. Novamente os alunos apresentaram facilidade na manipulação dos recursos do cenário, e todos atenderam aos comandos contidos nos quatro primeiros itens, de (a) a (d), que tinham o objetivo de promover a interação com o cenário. Os itens seguintes da atividade 2 já tinham o objetivo de representar frações na reta numérica e não apresentavam qualquer orientação sobre como manipular o cenário. Os itens (e) e (f) pediam para os alunos obterem a representação no sistema do cenário 3 de uma fração dada. No item (e), 67% dos alunos mostraram não ter entendido o papel dos parâmetros p e q na representação geométrica de uma fração, mas por conta própria perceberam que o resultado obtido não fazia sentido e se corrigiram. No item (f), esta deficiência caiu para 33% dos alunos, com os mesmos novamente corrigindo o engano. No fim, todos realizaram todas as tarefas restantes da atividade 2.

Todos os alunos realizaram as três tarefas da atividade 3 sem maiores problemas. Todos conseguiram manipular o cenário a fim de representar todos dados que eram fornecidos nas tarefas. Como era de se esperar, alguns alunos tiveram que fazer mais de uma tentativa mudando a escolha do parâmetro q até encontrar uma fração entre os pontos A e B. Inclusive alguns alunos perceberam a necessidade de ampliação da figura para tirar a dúvida sobre já ter conseguido uma fração entre os pontos A e B. A figura 7 apresenta a reprodução da solução de um dos alunos, sem a ampliação e com a ampliação do cenário manipulado. O desempenho dos alunos na atividade 3 deixou claro que estavam sabendo representar o que era pedido e, mais ainda, conseguiam tratar os registros obtidos até conseguirem atingir o objetivo das tarefas.

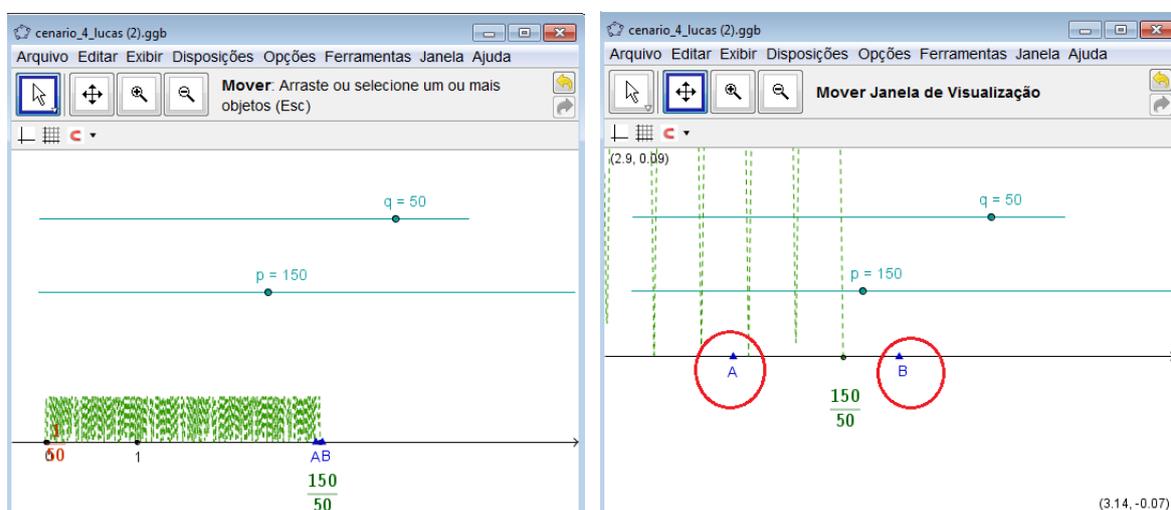


Figura 7. Solução de um dos alunos para o item (c) da atividade 3.

A atividade 4 tratava da distribuição dos números racionais na reta numérica. Todos os alunos demonstraram ter percebido como se dá a distribuição dos números racionais na reta numérica. Vejamos algumas respostas para o item (d) ilustradas na figura 8.

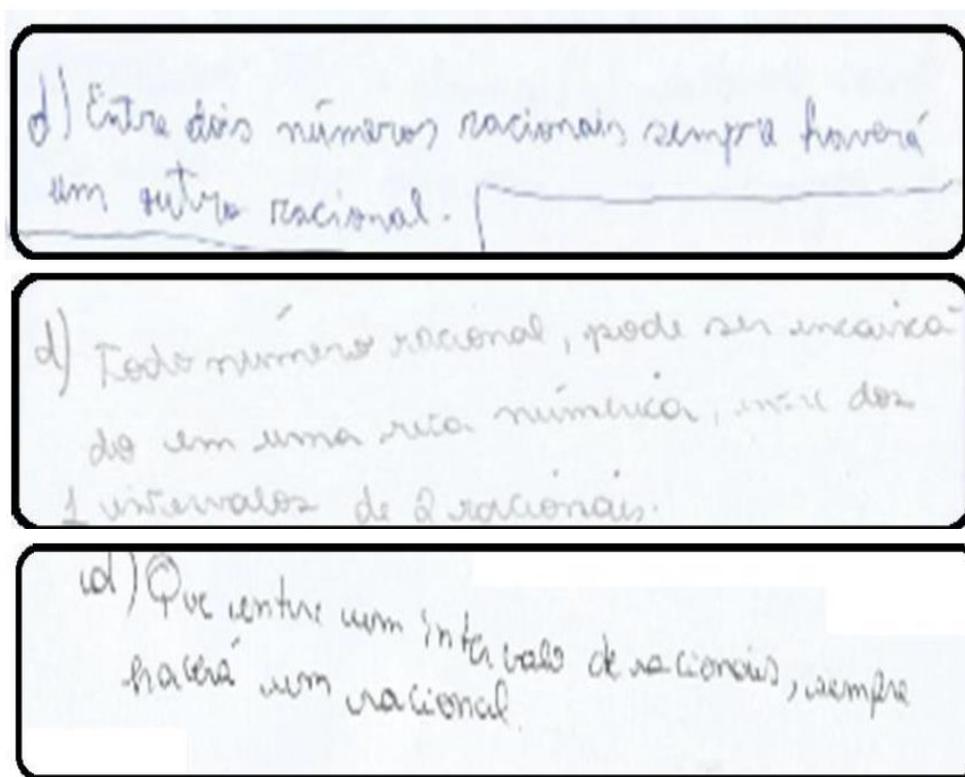


Figura 8. Três respostas ao item (d) selecionadas.

Vale notar que as respostas mostram também como os alunos confundem a reta numérica com o conjunto dos números racionais. Os alunos trocam “pontos na reta” ou “números reais” pela expressão “números racionais”.

5. Resultados da Experiência

Os alunos realizaram as tarefas solicitadas durante a experiência. As intervenções do mediador se restringiram a eventuais explicações sobre a redação das atividades e a motivar os alunos a refazerem as tarefas em momentos que percebessem que tinham feito algo inconsistente. Concluímos em primeiro lugar que o modelo de intervenção didática, cenários de aprendizagem interativos combinados com atividades que estimulem as três ações fundamentais sobre sistemas de representação semiótica, parece ajudar um aluno a construir seus conhecimentos matemáticos com autonomia, respeitando o seu ritmo de aprendizagem e permitindo que aprenda com seus próprios erros.

Algumas pesquisas sobre a propriedade de densidade citadas aqui destacam o engano cometido por alunos com relação à classificação de números racionais e irracionais, quando se utiliza o sistema de representação decimal, e a relacionam com a falta de entendimento desta propriedade. Também encontramos, nessas referências,

citações sobre alunos que, mesmo sabendo sobre a existência de infinitos números racionais entre dois números dados, não conseguem construir exemplos. Na experiência relatada aqui, com o sistema de representação utilizado, os alunos não se depararam com este tipo de obstáculo. Inclusive, foram capazes de encontrar exemplos explícitos de racionais entre números dados.

Infelizmente, vários fatores nos impediram de realizar uma experiência de maior alcance e fatos sobre a propriedade estudada não foram abordados. Por exemplo, os alunos perceberam que entre dois números da reta numérica sempre existe um número racional. Mas, não exploramos a concepção de que podem existir infinitos números racionais. Os alunos, no fim da atividade 4, realizaram, espontaneamente, a conversão do sistema de representação da tela do computador para a linguagem natural na hora de apresentar a resposta. Contudo, nesta resposta, evidenciaram que podem estar confundindo a reta numérica com os números racionais. Não tivemos tempo de apurar esta questão, que é importantíssima. Moutinho (2014) sugere a utilização do cenário 4 na construção do conhecimento de que os números racionais não cobrem a reta e a resposta que os alunos apresentaram na atividade 4 teria sido uma ótima oportunidade de aplicação desta sugestão.

Por fim, sugerimos novos estudos sobre este modelo de intervenção didática, considerando uma abordagem mais ampla do assunto, e até incluindo a questão da densidade dos números irracionais no conjunto dos números reais.

6. Referências

- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. 5ª a 8ª séries*. Brasília. 1998.
- BARTOLOMEU, V. S. *Conhecimentos e dificuldades dos estudantes do ensino médio relacionados ao conjunto dos números reais*. Dissertação de Mestrado - PUC /SP, São Paulo, 2010.
- BOFF, D. S. *A construção dos números reais na escola básica*. Dissertação de Mestrado Profissionalizante. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. 2006.
- COURANT, R.; HOBBS, H. *O que é Matemática?* Rio de Janeiro, Ciência Moderna. 2000
- D'AMORE, B. *Epistemologia e didática da Matemática*. Tradução de Maria Cristina Bonomi Barufi. São Paulo: Escrituras Editora, 2005.
- DIAS, M. S. *Reta real. Conceito imagem e conceito definição*. Dissertação de Mestrado - PUC/SP, São Paulo, 2002.

DUVAL, R. *Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática*. In: *Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica*. p.11-33. 2 ed. São Paulo: Papirus. 2003.

IGLIORI, S. B. C.; SILVA, B. A. *Concepções dos alunos sobre números reais*. In: LAUDARES, João Bosco, LACHINI, Jonas. *Educação matemática: a prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo*. Belo Horizonte: FUNARC, 2001. P. 39-67.

MEDEIROS, J. *Uma abordagem de ensino dos números reais*. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, PB. 2010.

MOUTINHO, I. *Um Ambiente Virtual de Aprendizagem como recurso de mediação na construção de conhecimentos relacionados com a operação multiplicação de números reais*. XI ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática – Educação Matemática: Retrospectivas e Perspectivas, SBEM. Curitiba, 2013.

MOUTINHO, I. *Reconhecendo a densidade dos números racionais no conjunto dos números reais com recursos da Geometria Dinâmica*. A sair em Caderno Dá Licença, v. 8. 2014.

PENTEADO, C. B.; SILVA, B. A. *A Densidade dos números reais: concepções de professores da educação*. Paradigma, Vol. XXXI, Nº1; Junho de 2010. P. 123–140.

SANTOS, J. C. *Números Reais: Um desafio na Educação Básica*. Monografia de Especialização. Universidade Federal Fluminense, Niterói, Rio de Janeiro. 2007.

SOUTO, A. M. *Análise dos Conceitos de Número Irracional e Número Real em Livros Didáticos da Educação Básica*. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, Instituto de Matemática – IM. 2010.