

RECONHECENDO A DENSIDADE DOS NÚMEROS RACIONAIS NO CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS COM RECURSOS DA GEOMETRIA DINÂMICA

ION MOUTINHO GONÇALVES

Universidade Federal Fluminense
ion.moutinho@gmail.com

Resumo: *O objetivo é apresentar uma atividade de ensino que estimule a percepção da propriedade de o conjunto dos números racionais ser denso no conjunto dos reais. Esta atividade é baseada em uma animação eletrônica criada pelo presente autor, e desenvolvida com recursos da Geometria Dinâmica, de maneira que permita ao aluno, de forma autônoma, explorar tal propriedade de densidade.*

Palavras-chave: *Densidade dos racionais nos números reais; Geometria Dinâmica; registros de representação semiótica*

Abstract: *The aim is to present a teaching activity that stimulates the perception that the set of rational numbers is dense in the set of real numbers. This activity is based on an electronic animation created by the presenting author, and was developed with Dynamic Geometry's tools, in a way that allows the student to explore such density property autonomously.*

Keywords: *Density of rationals in the real numbers; Dynamic Geometry; registers of semiotic representation*

1. INTRODUÇÃO

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) orientam, tanto para o ensino fundamental, quanto para o ensino médio, que uma abordagem para o ensino de Matemática deve possibilitar ao aluno participar ativamente do processo de construção de seus conhecimentos. Enquanto a comunicação do conhecimento matemático, e a validação destes, se dão pela lógica dedutiva, os PCN alertam que o ensino deste tipo de conhecimento pode se basear em outros métodos:

Na criação desse conhecimento, contudo, interferem processos heurísticos e intervêm a criatividade e o senso estético, do mesmo modo que em outras áreas do conhecimento. A partir da observação de casos particulares, as regularidades são desvendadas, as conjecturas e teorias matemáticas são formuladas. Esse caráter indutivo é, em geral, pouco destacado quando se trata da comunicação ou do ensino do conhecimento matemático. (BRASIL, 1998, p. 26)

Os PCN também apresentam orientações com relação à escolha de tópicos de estudo: “a seleção e organização de conteúdos deve levar em conta sua relevância social e sua contribuição para o desenvolvimento intelectual do aluno [...]” (p. 57). Em particular, encontramos referência à questão da aproximação numérica, questão esta que envolve a noção de densidade.

O ensino do conhecimento relacionado com a densidade dos números racionais no conjunto dos reais, assim como com a densidade dos números irracionais no conjunto dos reais, já foi objeto de pesquisa em alguns estudos, nacionais e internacionais, que evidenciam o desconhecimento desta propriedade, tanto no ensino básico quanto no ensino superior. Em (PENTEADO; SILVA, 2010), por exemplo, encontramos um breve panorama sobre o assunto, em termos de pesquisas em Educação Matemática. Neste artigo, os autores analisam as concepções de professores do ensino médio sobre a questão da densidade no conjunto dos reais, além das reações destes frente a uma proposta de ensino a partir de dois procedimentos, um deles baseado na média aritmética de dois números e o outro inspirado no método da diagonalização utilizado por Cantor para provar que o conjunto dos números reais não é enumerável. Penteado e Silva concluem a pesquisa relatando que os professores participantes consideraram a possibilidade de utilizar a intervenção proposta em suas aulas, julgando-a adequada e exequível.

A justificativa aqui considerada para a atenção em propostas de ensino para a noção de densidade no conjunto dos números reais pode ser completada com a pesquisa realizada por Santos (2007), que investigou como alguns livros didáticos de Matemática atuais desenvolvem o tema, números reais. Essa pesquisa mostrou uma ausência quase total, nos textos didáticos escolares, da noção de densidade, entre outros tópicos, na construção dos números reais.

O objetivo deste artigo é apresentar uma atividade de ensino que estimule a percepção da propriedade de o conjunto

dos números racionais ser denso no conjunto dos reais. Esta atividade é baseada em uma animação eletrônica criada pelo presente autor, e desenvolvida no programa GeoGebra (de autoria de Markus Hohenwarter) de maneira que permita ao aluno do terceiro ou quarto ciclo do ensino fundamental, de forma autônoma, explorar tal propriedade de densidade.

A fim de qualificar o potencial didático da atividade, é importante esclarecer os princípios utilizados na sua elaboração. Com relação à propriedade densidade, a animação eletrônica estimula o aluno a perceber que entre dois pontos distintos quaisquer da reta numérica sempre existe um número racional. Uma vez que se entenda que a reta numérica representa a noção de conjunto dos números reais, esta percepção do aluno pode se transformar na conjectura de que dados dois números reais distintos quaisquer, sempre existe um número racional entre eles, fato que caracteriza a propriedade de densidade do conjunto dos números racionais no conjunto dos reais.

O tipo de registro de representação utilizado é um aspecto importante para o valor didático da atividade. Esta se baseia na representação geométrica com o objetivo de atender a duas orientações importantes dos PCN, a utilização de diferentes representações dos números e a de evitar uma abordagem formal no início do estudo dos números irracionais. Com relação à primeira orientação, podemos diferenciar a abordagem geométrica aqui proposta, por exemplo, com os métodos utilizados por Penteado e Silva (2007), que basicamente apresentam somente representações algébricas e decimais, além da língua natural.

A abordagem informal proposta na atividade será apoiada no uso de outro tipo de recurso didático, também fortemente incentivado pelos PCN, as novas tecnologias. Segundo os PCN, os recursos das novas tecnologias podem evidenciar para os alunos “a importância do papel da linguagem gráfica e de novas formas de representação, permitindo novas estratégias de abordagem de variados problemas”; pode “auxiliar no processo de construção de conhecimento”, além de servir “como meio para desenvolver autonomia pelo uso de softwares que possibilitem pensar, refletir e criar soluções” (BRASIL, 1998, p. 44). Os PCN também apontam que, ainda com relação ao uso das novas tecnologias, “tudo indica que pode ser um grande aliado do desenvolvimento cognitivo dos alunos, principalmente na medida em que possibilita o desenvolvimento de um trabalho que se adapta a distintos ritmos de aprendizagem e permite que o aluno aprenda com seus erros” (IBIDEM, p. 44).

2. A ATIVIDADE DE ENSINO

A atividade que motivou a preparação deste artigo é realizada a partir de uma animação eletrônica que representa a reta numérica, destacando a unidade de medida. Também representa dois pontos, A e B, que podem ser deslocados sobre a reta, além de dois parâmetros numéricos chamados de p e q, que também podem variar de posição na animação. Representações de números racionais positivos podem ser obtidas fazendo-se deslizar os parâmetros p e q. A animação indica números racionais pela representação fracionária, porém

ênfatisa a sua representação geométrica. A representação gráfica dinâmica é de tal maneira que, à medida que se varia o valor de p, o aluno vê múltiplos de $1/q$ sendo marcados na reta. A seguir, na figura 1, apresentamos uma ilustração da atividade, quando se escolhe $q = 2$ e $p = 9$.

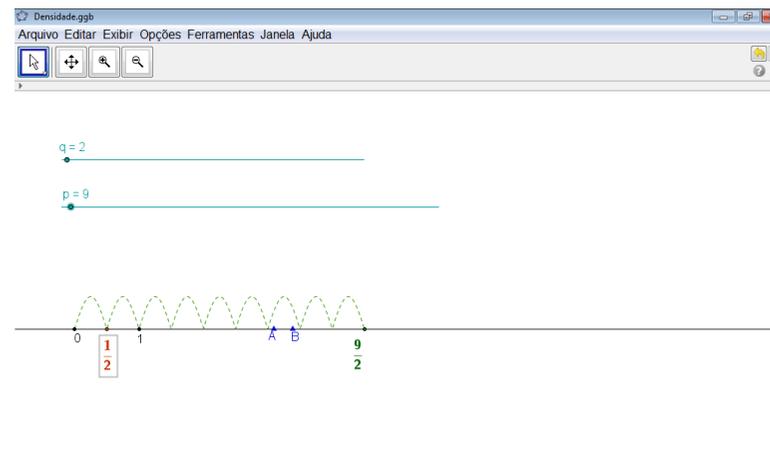


Figura 1 - Representação geométrica da fração $9/2$.

O usuário da animação será levado a perceber que quando o valor de p for suficientemente grande, p/q será maior do que B. Com a escolha arbitrária feita para q, o aluno pode encontrar, ou não, um número racional entre A e B. Na animação eletrônica, a verificação de que o número racional está, ou não, entre A e B é feita de modo simples, só por meio da visualização. No exemplo da figura 1, é imediato constatar que não é possível encontrar p/q entre A e B, quando $q = 2$. Caso o aluno não encontre um número racional entre A e B, ele pode tentar novamente mudando os parâmetros p e q. Faz parte

da atividade entender o papel de cada parâmetro, p e q . Por exemplo, seguindo a situação encontrada na figura 1, o aluno pode variar o parâmetro p como quiser, mas não conseguirá atingir o objetivo. Assim, ele será obrigado a buscar uma nova posição para o parâmetro q . A expectativa é de que, explorando e experimentando diferentes posições de p e q , o aluno, dentro de seu ritmo de aprendizagem, sempre consiga encontrar um número racional entre os pontos A e B e de que ele entenda o papel dos parâmetros p e q .

Lembrando que o propósito é perceber que entre dois pontos distintos quaisquer da reta numérica sempre existe um número racional, é importante variar também as posições para os pontos A e B. Assim, quando o aluno conseguir encontrar uma fração (ou seja, um número racional) entre A e B, deve-se pedir para ele considerar uma nova posição para A e B, de preferência deixando-os mais próximos. Junto com o entendimento do papel dos parâmetros p e q , esta variação livre dos pontos A e B é que deve levar o aluno a perceber a propriedade de densidade dos racionais na reta numérica.

A verificação de que existe um número racional entre pontos A e B variados por meio de visualização nem sempre é tão simples. Podem ocorrer dúvidas quando os pontos A e B estiverem muito próximos, por exemplo. Um recurso disponível e muito útil para esta atividade é a ferramenta do GeoGebra que permite ampliar. Se acontecer de o aluno ficar na dúvida se o número racional ficou entre A e B, ou não, basta lançar mão de tal ferramenta. Vejamos as figuras 2 e 3, a seguir. O aluno pode ficar na dúvida, ao visualizar a figura 2, se existe uma fração do tipo $p/7$ entre A e B.

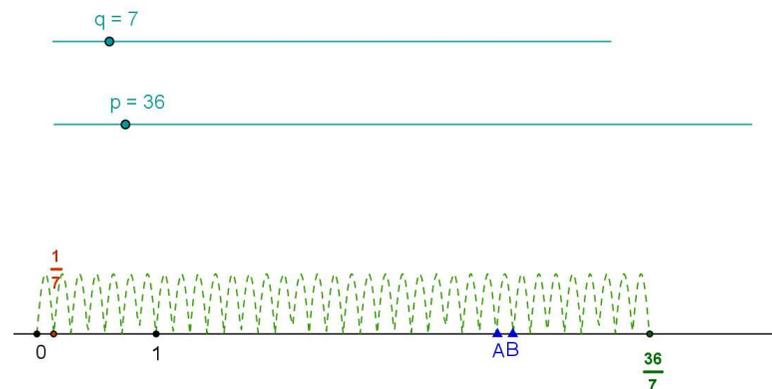


Figura 2 - Parte da visão inicial.

Com o recurso da ampliação, é imediato, por meio da visualização mesmo (veja a figura 3), concluir que não existe uma fração de denominador 7 entre A e B.

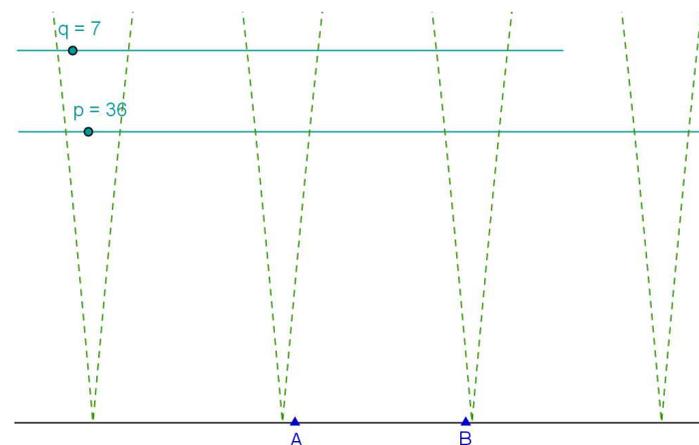


Figura 3 - Peçaço da visão ampliada.

Se o leitor quiser testar por conta própria a viabilidade das propostas sugeridas aqui, sugerimos visitar o endereço na internet,

<http://ionmoutinho.blogspot.com.br/2012/02/reconhecendo-densidade-dos-numeros.html>

3. APLICAÇÕES DA ATIVIDADE DE ENSINO

Além de induzir o aluno a perceber a propriedade de densidade dos números racionais no conjunto dos reais, a animação eletrônica também pode ser útil na discussão sobre o fato da reta numérica não ser coberta pelos números racionais. Deixando um dos pontos de lado, digamos o ponto B, podemos colocar como desafio para um aluno tentar fazer um racional coincidir exatamente com o ponto A da animação. Pela liberdade de escolha dos parâmetros p e q que a animação oferece, é razoável ficar em dúvida se o conjunto dos números racionais coincide com a reta numérica ou não.

A figura 4 mostra uma situação onde se escolheu um lugar para o ponto A e na qual alguns racionais de denominador 13 foram marcados. Aparentemente, pela figura, uma fração de denominador 13 coincide exatamente com o ponto A.

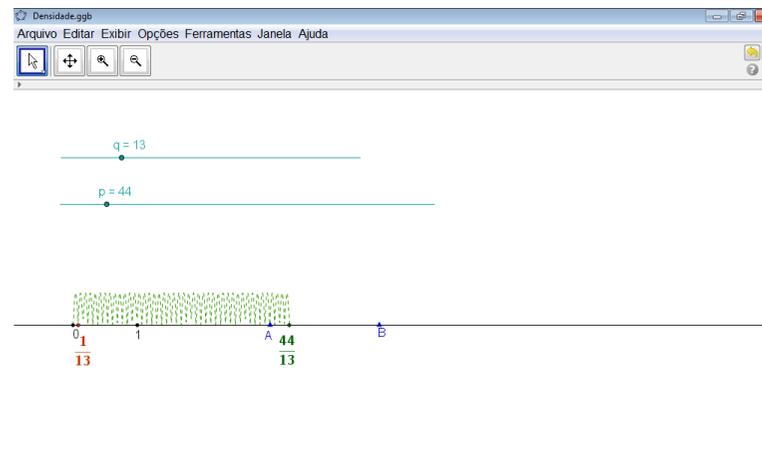


Figura 4 - Tentativa de fazer uma fração de denominador 13 coincidir com o ponto A.

Agora, usando a ferramenta de ampliação (vide figura 5), vemos claramente que o ponto A não coincide com nenhuma fração de denominador 13.

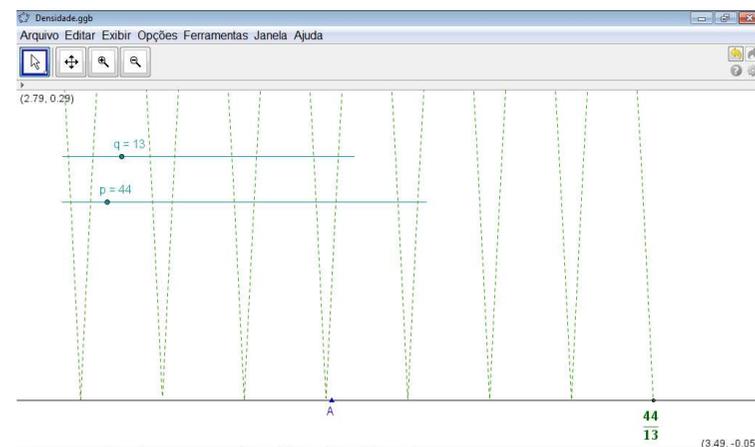


Figura 5 - Parte da figura anterior, depois de ampliada.

Neste tipo de atividade, praticamente sempre ocorrerá a dúvida sobre a existência de um racional que coincida com cada ponto da reta numérica. Assim, apesar de podermos perceber que todo ponto da reta numérica pode ser aproximado por um racional, não está claro que todo ponto da reta numérica representa um número racional.

Outro aspecto interessante sobre a atividade é com relação à realização da prova de que o conjunto dos números reais é denso no conjunto dos reais. Deve ficar claro para o aluno que a verificação livre da propriedade, entre dois pontos distintos quaisquer da representação da reta numérica sempre existe um racional, não serve de modo algum como uma prova matemática. Entretanto, para o aluno, a observação do funcionamento da animação eletrônica e a vivência obtida a partir do seu uso bem podem servir como um guia na elaboração de uma prova formal, nos moldes do que encontramos numa disciplina de Análise em cursos de Matemática no ensino superior.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Poder explorar e experimentar, ou seja, vivenciar representações virtuais dinâmicas são ótimas oportunidades para o processo de construção de conhecimento do aluno. E os programas de Geometria Dinâmica têm se destacado como ferramentas eficientes para estes propósitos. A animação eletrônica apresentada e analisada aqui pode ser útil para o aluno explorar e experimentar sobre o comportamento de distribuição dos números racionais no conjunto dos reais. Um

destaque para a animação é que ela ajuda a analisar um comportamento numérico por meio de visualização, evitando, assim, eventuais obstáculos como uso de representações decimais, principalmente infinitas, e uso de representações simbólicas, principalmente quando se exige manipulações algébricas que podem ainda não ter significado para o aluno.

REFERÊNCIAS:

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. 5ª a 8ª Séries*. Brasília, 1998.

PENTEADO, C. B.; SILVA, B. A. *A Densidade dos números reais: concepções de professores da educação*. Paradigma, Vol. XXXI, Nº1, p. 123–140, Junho de 2010.

DOS SANTOS, J. C. *Números Reais: Um desafio na Educação Básica*. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Ensino de Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal Fluminense, Niterói, Rio de Janeiro, 2007.