Fundamentos dos números reais: concepções de professores e viabilidade de inicío do estudo da densidade no ensino médio

Benedito Antonio Da Silva[1]
Cristina Berndt Penteado[2]

Resumo
O artigo discute, num primeiro momento, os saberes mobilizados por professores do ensino médio, ao desenvolverem atividades sobre os números reais e, posteriormente, aborda a viabilidade de se introduzir o estudo da propriedade da densidade na educação básica. Para esta abordagem propõem-se aos professores questões numa sequência que permite utilizar dois procedimentos: Ao iniciar a discussão da densidade dos números racionais, o processo se baseia
no cálculo da média aritmética, o que permite encontrar infinitos números racionais entre dois números dados. Já no caso de um dos números ser irracional, sugere-se a mudança de algarismos em sua representação decimal infinita. É relatada a disponibilidade manifestada por participantes da investigação em utilizar a intervenção proposta em suas aulas, por julgarem-na adequada e exeqüível, além de possibilitar um primeiro passo no sentido da compreensão dessa propriedade dos números reais.
Palavras-chave: *números racionais e irracionais; densidade dos números reais; representação decimal infinita; reta real.*

Abstract
The paper discusses, at first moment, the knowledge mobilized by high school teachers at developing activities about real numbers, and later discusses the feasibility of the introduction of the property of density study on basic education. This approach allows the teachers questions, in a sequence that let them use two procedures: When the discussion of the density of rational numbers begins, the procedure proposed is based on the arithmetic average, which enables to find infinite rational numbers between two given numbers. But in case of one of the numbers be irrational, it is suggested a change of digits in its infinite decimal representation. It is reported the possibility expressed by this investigation participants to use this intervention proposed at their classes, by judging it is appropriate and feasible, besides providing a first step towards the understanding of this property of real numbers.
Keywords: *rational and irrational numbers, density of real numbers, infinite decimal representation, real line.*

Introdução

A noção de números reais está presente na maioria dos conteúdos de Matemática e, como evidenciam pesquisas nacionais e internacionais, muitas das dificuldades dos alunos na aprendizagem de limite e continuidade de funções, por exemplo, são decorrentes da falta de compreensão de propriedades do conjunto dos números reais.

No desempenho de nossas funções de professores nos deparamos frequentemente com situações em que os alunos questionam, por exemplo, se 1,60 é maior ou não que 1,6 ou então qual seria o sucessor de 2,5. Estas questões nos

[1] Professor do Programa de Pós Graduação em Educação Matemática da PUC-SP
[2] Mestre em Educação Matemática

incentivam a estudar e pesquisar a respeito de números reais e a reta real para podermos tentar desempenhar melhor nosso papel de educadores.

Pesquisas como as de Robinet (1993), Fischbein, Jehiam e Cohen (1995); e Tirosh (1995) apontam dificuldades de alunos no estudo de conteúdos matemáticos devido à falta de conhecimento' a respeito de números reais e de suas propriedades como, por exemplo, a caracterização dos números racionais e dos irracionais, e a noção de densidade dos reais.

Robinet realizou sua pesquisa na França, com alunos dos equivalentes últimos anos do ensino médio brasileiro e o primeiro ano de graduação, objetivando investigar que modelos de números reais os alunos possuíam e como se dá a interação entre suas concepções e a aprendizagem das noções de Análise Matemática.

A pesquisa de Fischbein et al. teve por objetivo avaliar, em que medida, certas dificuldades na conceituação dos irracionais como, por exemplo, a existência de grandezas incomensuráveis e o fato de o conjunto dos racionais ser denso no conjunto dos reais e não cobrir a reta toda (isto é, na reta existem "buracos" que são preenchidos pelos números irracionais), constituem obstáculos de aprendizagem futura. Esta pesquisa foi realizada em Tel Aviv com estudantes que estavam terminando a educação básica e também com iniciantes do curso de Licenciatura em Matemática.

A pesquisa de Tirosh teve como objetivo avaliar as concepções que os alunos têm sobre o infinito. Também foi realizada em Tel Aviv com estudantes entre 11 e 17 anos e sua autora visou apresentar sugestões que poderiam possibilitar a compreensão dos alunos sobre o infinito, principalmente o atual.

As duas primeiras pesquisas trouxeram à tona a forte idéia que os estudantes descrevem número irracional como sendo aquele que possui uma representação decimal infinita, mesmo sendo uma representação periódica. A terceira explicitou o fato que os alunos estendam para conjuntos infinitos propriedades de conjuntos finitos, como por exemplo 'a parte é maior que o todo', ao afirmarem que existem mais números naturais que números ímpares, já que estes formam um subconjunto próprio dos primeiros A dificuldade de distinguir a cardinalidade do conjunto dos números naturais e a dos reais esteve presente nas três pesquisas.

A associação de número irracional a um número que não é exato apareceu nas duas primeiras pesquisas. A concepção de que um número irracional é aquele que não é inteiro ou que é negativo foi revelada na pesquisa de Fischbein et al., na qual também se percebeu que os alunos consideram que duas grandezas são sempre comensuráveis alegando que basta diminuir a unidade o quanto for necessário para ser um submúltiplo comum das grandezas em questão. Também nas duas primeiras foi revelado que o modelo geométrico da reta não corresponde à reta de Dedekind, pois suas propriedades permaneciam válidas mesmo quando a reta fosse composta apenas por racionais.

Motivados por essas investigações, pesquisadores brasileiros levaram a cabo dois estudos: o primeiro realizado por Igliori e Silva (2001), foi desenvolvido com alunos iniciantes do curso de Ciências da Computação e com finalistas do curso de Licenciatura em Matemática, de uma universidade em São Paulo, evidenciou que os estudantes investigados, ao representarem números decimais na reta real, não consideraram a densidade da mesma.

Essa pesquisa desvelou também a confusão entre os conceitos de número racional e irracional quanto à representação decimal e quanto à existência de sucessor de número real. Alguns alunos descreveram número irracional como sendo infinito ou aquele que contém infinitos dígitos após a vírgula ou ainda, as raízes. Identificaram número racional como sendo exato ou inteiro. Percebeu-se também que o símbolo de reticências causa instabilidade nas respostas, mesmo se houver um número finito de dígitos, associando-o a um número irracional, como por exemplo, na representação 1,333...3, que indica a última casa decimal, apesar de não se conhecerem todos os algarismos entre a terceira e a última. A irracionalidade foi considerada como sendo sinônimo de número negativo em algumas respostas. A grande maioria dos entrevistados não identificou a igualdade entre as representações 1,999... e 2. ARTIGUE (1995, p. 113, tradução nossa) também descreve que:

> Em muitas investigações, se tem pedido aos estudantes universitários que comparem os números 0,9999... e 1. A frequência das respostas erradas bem como a força das convicções que nelas se manifestam, demonstra a dificuldade que existe para perceber a expressão 0,9999... como sendo algo diferente de um processo dinâmico que não se detém jamais, e [demonstra a dificuldade] para lhe atribuir a designação de um número.

A pesquisa concluiu que a maioria dos alunos identifica a existência de infinitos números racionais entre dois racionais em um determinado intervalo da reta, mas não a existência de infinitos irracionais neste mesmo intervalo. Esse resultado nos aponta que a densidade dos números reais não é de todo familiar a esses estudantes.

Uma segunda pesquisa brasileira realizada por Soares, Ferreira, e Moreira (1999) com 84 alunos dos cursos de Matemática da UFMG e da UFSC identificou que um número irracional é aquele que não é exato, ou que possui infinitas casas decimais, isto é, associam os irracionais a tudo aquilo que não é familiar ou bem compreendido, ou ainda, número irracional é associado à imprecisão e a não exatidão. Assim como foi revelado nas pesquisas de Igliori e de Tirosh, entre esses estudantes existe a noção de que toda medida é expressa por um número racional. Também nesse estudo, muitos alunos não expressaram a existência de números irracionais entre dois racionais, dados no registro de representação fracionária e ainda associaram as dízimas periódicas com a irracionalidade.

Destacamos ainda que nessas investigações foram identificadas concepções como: duas grandezas quaisquer são sempre comensuráveis; as propriedades atribuídas à reta real continuavam válidas mesmo sem os números irracionais; a não distinção entre a cardinalidade dos naturais e a dos reais; existem mais números naturais que ímpares; a identificação entre as representações 3,1416 e π e também entre 2,7182 e e; a classificação de 3,1416 como um número irracional; a identificação entre uma representação fracionária com número racional, independentemente da natureza do numerador e do denominador; a não identificação das representações 1,999... e 2 como sendo de um mesmo número; a definição de números irracionais como sendo somente aqueles com representação com raízes; a confusão entre número e um valor aproximado deste atribuindo-lhes o mesmo significado; a transposição da noção de sucessor dos números naturais para os números reais; o desconhecimento da existência de infinitos números entre dois reais; a idéia de que um número racional é exato ou inteiro e que número irracional é aquele que possui uma representação decimal infinita ou um número que não é exato, que não é inteiro ou que é negativo e o desconhecimento da completude do conjunto dos números reais.

Por seu lado, os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (1998) recomendam a introdução do estudo de números irracionais já no 4º ciclo (a partir da 7ª série) e os PCN para o Ensino Médio - PCNEM (2000, p.114 e 116) sugerem ainda a utilização de vários registros de representação, bem como a identificação de um objeto nas suas diferentes representações:

> Identificar, transformar e traduzir adequadamente valores e unidades básicas apresentadas sob diferentes formas como decimais em frações ou potências de dez [...] Perceber as relações e identidades entre diferentes formas de representação de um dado objeto [...] Traduzir uma situação dada em determinada linguagem para outra, bem como, localização na reta numérica de números racionais e reconhecimento de que estes podem ser expressos na forma fracionária e decimal, estabelecendo relações entre essas

> representações [...] Identificação de um número irracional como um número de representação decimal infinita, e não-periódica, e localização de alguns deles na reta numérica, com régua e compasso.

Diante desse manancial de informações sobre a realidade do ensino e aprendizagem de tais números, nos indagamos se não seria possível inserir intervenções junto aos alunos da educação básica, que possam contribuir para a iniciação desses estudantes no estudo da fundamentação dos números reais.

Assim nos propusemos investigar quais os saberes mobilizados por professores do ensino médio, ao analisarem questões envolvendo a categorização dos números reais em racionais e irracionais, como ponto de partida para o desenvolvimento de atividades que visam discutir, tanto a densidade do conjunto dos racionais como dos irracionais no conjunto dos números reais. Buscamos colher dados sobre sua opinião quanto à viabilidade de eles, ou adaptando os procedimentos sugeridos pelas atividades realizadas ou criando novos, iniciar com seus alunos, o estudo dessa propriedade.

Noções sobre a densidade e a representação dos números reais

Segundo Lima (1977, pp. 73-74): "O conjunto Q dos números racionais é denso em R. Também o conjunto R - Q, dos números irracionais, é denso na reta. Com efeito, todo intervalo aberto contém números racionais e irracionais". Neste trabalho empregaremos o termo densidade no sentido dado por Caraça (1989, p. 56): "um conjunto é denso se entre dois dos seus elementos quaisquer existir uma infinidade de elementos do mesmo conjunto".

Até o século XVI predominavam as idéias gregas segundo as quais as quantidades tinham dois componentes disjuntos: o discreto (número) e o contínuo (grandeza). Estes componentes se traduziram na Matemática como o estudo das grandezas e dos números, isto é, como o estudo da Geometria e da Aritmética. O conceito grego de número foi desenvolvido como o resultado de um processo de abstração aplicado ao mundo material.

Este cenário mudou com o trabalho de Stevin que, em 1585, publicou seu livro *L'Arithmetique* produzindo um avanço epistêmico no conhecimento matemático. Esta obra é um tratado sobre os aspectos teóricos e práticos da Aritmética e apresenta uma nova conceituação: "número é aquilo através do qual os aspectos quantitativos de cada coisa são revelados" (MORENO – ARMELLA; WALDEGG, 2002, p.186). Desse modo, Stevin elimina a dicotomia entre o discreto e o contínuo, tornando essas componentes, propriedades circunstanciais do objeto quantificado. Por exemplo, segundo o autor, referindo-se a uma pessoa, o número "um" era discreto, entretanto ligado a uma jarda, o número "um" era contínuo. Deste modo não poderia haver distinção entre o objeto de estudo da Aritmética (discreto) e o da Geometria (contínuo).

Em sua obra *De Thiende* (O décimo) publicada nesse mesmo ano enfatizava o aspecto operacional, apresentando uma sistematização com algumas inovações da notação decimal já conhecida na época. Nesse trabalho "identificou grandeza e número, atribuindo propriedades numéricas a quantidades contínuas e continuidade a números" (MORENO – ARMELLA; WALDEGG, 2002, p.187). A partir daí, não era possível, para os matemáticos, separarem o conceito de quantidade de sua representação simbólica.

Apesar de não ter sido o inventor nem o primeiro a recomendar a utilização das frações decimais foi o primeiro a organizar o sistema divulgando-o entre o povo e os usuários de Matemática. Já em 1579, François Viète (1540–1603) havia recomendado com insistência o uso de frações decimais em vez de as sexagesimais. Mas foi Stevin quem as ensinou por meio de um sistema elementar e completo, concentrado nos décimos, centésimos, milésimos, etc., das frações como sendo numeradores inteiros, não escrevendo suas expressões decimais como um denominador; como fazia Viète. Em vez disso escrevia num círculo acima ou depois de cada dígito, a potência de dez, assumida como denominador. Segundo sua representação, o valor aproximado de π expressava-se como:

⓪ ① ② ③ ④   ou   3⓪1① 4②1③ 6④
3 1 4 1 6

Outra representação sugerida por Stevin encontrada em DANTZIG (1970, p. 223) é:

$$24\,3^{(1)}\,7^{(2)}\,5^{(3)},$$

para a representação atual de 24,375, fugindo da notação fracionária até então utilizada, isto é, $\frac{375}{1000}$. Aqui os círculos colocados acima dos dígitos são substituídos por parênteses acima e à direita dos mesmos e omitindo o círculo com o zero para indicar a parte inteira do número.

Stevin foi mais além ao sugerir que tais notações fossem usadas também para expoentes fracionários. Embora não tivesse usado a notação com índice fracionário, ele manifestou explicitamente que $\frac{1}{2}$ dentro de um círculo significava raiz quadrada e que $\frac{3}{2}$ dentro de um círculo indicaria a raiz quadrada de um cubo.

Segundo Caraça (1989, p. 80), com o problema da incomensurabilidade, que só poderia ser explicado pelo conceito "quantitativo de infinito", isto é, a estrutura contínua da reta, cai a escola Pitagórica que acreditava que, dados dois segmentos quaisquer $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, sempre seria possível encontrar um terceiro $\overline{EF}$ contido um número inteiro de vezes em $\overline{AB}$ e um número inteiro de vezes em $\overline{CD}$, ou seja, que dois segmentos são sempre comensuráveis.

O tratamento geométrico da incomensurabilidade conduziu naturalmente para o tratamento aritmético e algébrico dos números irracionais. Desde Pitágoras até Weierstrass, os irracionais ocuparam as atenções de uma parte considerável do mundo que se empenhou em achar um valor aproximado para expressões como π, $\sqrt{2}$...

Por muito tempo, pensou-se que o conjunto dos números racionais seria um modelo adequado para tomar o lugar do modelo geométrico, uma vez que possui propriedade da densidade, assim como a reta (entre dois pontos quaisquer existem infinitos pontos). Porém esse corpo numérico não "preenche" todos os pontos da reta: existem pontos que correspondem a números, como por exemplo, a $\sqrt{2}$, isto é, o conjunto dos racionais não completa a reta. A ele falta uma propriedade essencial presente no modelo geométrico, a saber, a continuidade.

Considerando agora todos os números reais, todo ponto da reta corresponde a um número e todo número corresponde a um ponto da reta. O fato de todos os comprimentos poderem ser expressos por números reais é conhecido como a propriedade da completude destes números. Tal propriedade é chamada de Axioma de Dedekind-Cantor: "É possível associar a qualquer ponto na reta um único número real e, inversamente, qualquer número real pode ser representado de maneira única por um ponto numa reta" (DANTZIG, 1970, p. 157).

Cantor utilizou um argumento baseado no princípio posicional do sistema decimal para provar a não enumerabilidade do conjunto dos números reais. Este argumento, conhecido como o processo da diagonal de Cantor, que consiste na troca de algarismos de uma representação decimal, deu-nos a idéia para propor um procedimento para a obtenção de números irracionais entre dois reais quaisquer, nas atividades propostas em nosso trabalho de introdução ao estudo da densidade dos números reais.

A representação decimal dos números reais é, na ótica de Raymond Duval, um tipo de registro de representação semiótica dos números. Para ele, como os objetos matemáticos não são diretamente acessíveis, a compreensão em Matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representação semiótica, enfatizando que:

> É suficiente observar a história do desenvolvimento da Matemática para ver que o desenvolvimento das representações semióticas foi uma condição essencial para a evolução do pensamento matemático. [...] Primeiramente, há o fato de que as possibilidades de tratamento matemático – por exemplo, as operações de cálculo – dependem do sistema de representação utilizado. Por exemplo, o sistema de numeração decimal de posição oferece mais possibilidades que os sistemas grego e romano de numeração e, no entanto, a aquisição desse sistema de numeração pelos alunos não é simples. [...] (DUVAL, 2003, p. 13).

A representação é necessária e carrega o poder de substituir o objeto matemático, não sendo ele próprio. Duas representações de um mesmo objeto, em diferentes registros, não possuem o mesmo conteúdo mas explicitam propriedades e aspectos diferentes em cada um deles. Segundo esse autor, a articulação de diferentes registros possibilitará o acesso à compreensão em Matemática. É importante mencionar que “um sucesso matemático não corresponde a um sucesso cognitivo” (p.27), pois nem sempre quem manipula adequadamente os algoritmos tem total compreensão do significado do objeto envolvido.

Para o autor, pelo fato de haver várias representações para um mesmo objeto, a sua apreensão efetiva pode ser alcançada a partir do momento em que o sujeito consegue transitar de uma representação a outra utilizando os diferentes tipos de registros de representação: o numérico, algébrico, gráfico, geométrico ou da língua natural. Defende que uma condição necessária para possibilitar a apreensão do objeto matemático é a articulação entre, pelo menos, dois registros de representação semiótica.

As representações devem ser identificáveis, ou seja, análogas às descrições de um enunciado. Esta descrição por sua vez, respeita regras já estabelecidas culturalmente, tanto lingüísticas, como da construção de figuras e símbolos matemáticos, que devem ser utilizadas para reconhecer as representações. Uma representação será identificável se houver uma seleção de características e de dados do conteúdo a ser representado. O sujeito deve, portanto, conhecer, compreender e saber como utilizar essas tais regras, por exemplo: o reconhecimento do sistema de numeração hindo-arábico, o desenho de uma figura ou a escrita de uma fórmula.

Para apreender um conceito é necessário, segundo Duval, mobilizar dois tipos de transformações de representações semióticas: o tratamento e a conversão.

O tratamento é a transformação de uma representação no interior de um mesmo registro. Cada um dos registros possui um conjunto de regras específicas de tratamento que não necessariamente são válidas para outro. Os tratamentos são ligados à forma e não ao conteúdo matemático, no sentido de que um mesmo objeto matemático pode ter duas representações diferentes, com seus respectivos tratamentos que também possuem graus diferentes de dificuldade. Por exemplo, no registro de representação decimal dos números racionais e irracionais: "o tratamento exige a compreensão das regras do sistema posicional e da base dez. Sem a compreensão destas regras, a representação algorítmica não tem sentido, ou seja, não existe tratamento significativo." (DAMM, 1999, p. 145).

A segunda transformação, chamada conversão, se processa entre dois diferentes registros. A realização de conversões pode possibilitar a compreensão de vários aspectos de um mesmo objeto, pois cada representação explicita apenas alguns de seus aspectos componentes. A coordenação entre ao menos dois registros de representação, pode possibilitar a conceitualização, pois ela estabelece as relações entre os registros evidenciando pontos de vista diferentes de um mesmo objeto matemático. Isto não se alcança somente com a habilidade de realizar tratamentos em cada registro separadamente. Cada linguagem oferece possibilidades diferentes de representações e seus respectivos tratamentos, e a coordenação deles oferece possibilidades de novas aprendizagens. Os diferentes registros que representam o mesmo número têm significação diferente e custos de tratamento também diferentes.

A conversão de registros, conserva a referência aos mesmos objetos e, assim, conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão. Porém, com ela pode ocorrer o fenômeno da não-congruência, ou seja, o fato de os sujeitos não reconhecerem o mesmo objeto representado em dois registros diferentes, em que a representação final não transparece na representação inicial.

A intervenção

O trabalho foi motivado pelos resultados de pesquisas sobre o ensino e aprendizagem dos números reais. Se, por um lado, esses resultados mostram que há lacunas presentes nos saberes mobilizados por alunos e professores, por outro lado, também é sabido que os fundamentos dos números reais em geral não merecem um tratamento mais elaborado em cursos de graduação, principalmente nos de Licenciatura em Matemática. Na maioria das vezes é feito apenas um estudo da construção axiomática dos números reais, que embora rigorosa, pode deixar subentendidas propriedades importantes como a da densidade e da completude.

A brilhante reposta dada por Eudoxo à questão da incomensurabilidade por meio da definição de proporcionalidade teve, em contrapartida, o efeito de a Matemática ser tratada por muitos séculos pelo modelo próprio das grandezas geométricas. Tal fato resultou em se acreditar que o conjunto dos números racionais, por ser denso, fosse suficiente para fundamentar questões matemáticas. Foi com Dedekind, no século XIX, que ficou evidenciado que o sistema numérico carecia de uma propriedade inerente ao sistema geométrico, a saber, a continuidade. Ao construir o conjunto dos números reais, por meio dos cortes, evidenciou a completude da reta real.

Com esses dois pressupostos começamos a nos indagar se não seria viável já na educação básica começar, de algum modo, a discussão de algumas das propriedades que constituem os fundamentos dos números reais. Optamos por fazer a investigação sobre a densidade e tivemos a oportunidade de trabalhar com um grupo de professores participantes do PEC – Projeto de Educação Continuada, que visa capacitar professores da rede pública por meio de palestras, aulas e oficinas totalizando 80 horas.

O trabalho teve dois momentos: numa fase inicial procurou-se investigar quais os saberes que os professores mobilizavam relativamente à caracterização dos números racionais e irracionais. As questões propostas se respaldaram nos resultados das pesquisas anteriormente aqui comentadas, em elementos da epistemologia histórica e nos registros de representação semiótica. Entendemos que essa primeira fase é essencial para o desenvolvimento da seguinte, em que se procurou discutir com os integrantes da pesquisa dois procedimentos visando uma introdução ao estudo da densidade dos números reais. Um destes, referente à densidade dos racionais, por meio de sua média aritmética de dois números dados e outro focando a densidade do conjunto dos irracionais e também dos racionais, para a obtenção tanto de números irracionais como de irracionais, entre dois reais dados, a partir da troca de um ou mais algarismos, da representação decimal de um deles. Este último procedimento foi inspirado no processo de diagonalização de Cantor, utilizado para demonstrar que o conjunto dos números reais entre zero e um, não é enumerável. Posteriormente, inquirimos os professores sobre a viabilidade de aplicação dessas atividades ou assemelhadas a seus alunos.

Para tanto foi realizada uma intervenção por meio da elaboração, aplicação e análise de uma seqüência de ensino, composta de dez atividades. Tanto na elaboração da seqüência como na análise dos dados obtidos, seguimos a sugestão de Duval que enfatiza a necessidade de se trabalhar com no mínimo dois registros de representação diferentes e de se realizar a articulação entre eles, criando, com isso, mais possibilidades para que ocorra a aquisição do conhecimento. Dessa forma, foram privilegiados os registros da língua natural, decimal, fracionário e gráfico, bem como a articulação entre eles.

As atividades foram realizadas com onze professores do Ensino Médio, como oficinas integrantes do PEC, sendo que o trabalho foi realizado primeiramente em duplas, com posterior discussão das produções e das justificativas, pelo grupo todo.

A expectativa era a de que estas atividades proporcionassem uma reflexão a respeito da propriedade da densidade da reta, pois sugerimos questões que podem fazer aflorar noções e particularidades dos números reais que, usualmente, não são enfatizadas no ensino básico.

As questões das duas primeiras atividades foram inspiradas nas pesquisas citadas e contribuíram para que pudéssemos conhecer os saberes mobilizados pelos participantes, comparando suas concepções às já identificadas naquelas pesquisas. Aplicadas estas duas primeiras, que podemos chamar de diagnósticas, e analisados os dados obtidos, elaboramos então outras oito atividades com a meta de discutir elementos concernentes à introdução do estudo da densidade dos números reais. A primeira delas foi norteadora para as atividades seguintes. A segunda, composta por catorze afirmações para serem classificadas em verdadeiras ou falsas, além de diagnóstica também foi provocativa. Alguns participantes mostraram-se estimulados a pesquisar e estudar mais sobre este assunto.

Dentre as afirmações apresentadas constam, por exemplo: “Entre dois números irracionais existe exatamente um número irracional” (Q3); “Entre dois números irracionais existe um número racional” (Q4);” Entre um número irracional e um racional existe um único número irracional “(Q9). Esta atividade, com questões apresentadas da língua natural, propiciou o desvelamento de dificuldade de compreensão do significado matemático de expressões como "um único número", "exatamente um", "não existe", dentre outras. Mesmo aqueles participantes que perceberam que este registro fornecia informações essenciais nestas expressões, às vezes sublinhando-as, demonstraram certa insegurança na tomada de decisão A dificuldade no entendimento do enunciado foi minimizada com a discussão no interior de cada grupo. A maior delas foi justificar, por escrito, as decisões tomadas para classificar as afirmações em verdadeiras ou falsas. A maioria concordou com a fala de um professor*: "Colocar verdadeiro ou falso é fácil, o difícil é justificar depois".*

Esta atividade foi aplicada duas vezes: a primeira vez com caráter diagnóstico e para propiciar o início e o direcionamento da discussão para o foco da pesquisa. Dois meses após, foi reaplicada para averiguarmos se houve ou não alguma mudança de atitude, por parte dos sujeitos, após os procedimentos trabalhados anteriormente. Pudemos observar que aqueles professores que haviam manifestado alguma insegurança na tomada de decisão, apresentaram agora um desempenho muito melhor com justificativas pertinentes às suas escolhas. As questões propostas eram gerais e mais teóricas do que as das demais atividades e talvez por este motivo, na resolução não foi utilizado prioritariamente o registro decimal. Para exemplificar um número racional, a maioria utilizou o registro fracionário e para um número irracional foi exclusivamente usado o registro simbólico. Estes registros utilizados podem evidenciar que os padrões de número irracional são principalmente aqueles associados às raízes quadradas não exatas e a π.

As noções a respeito dos números racionais e irracionais explicitadas pelos professores foram muito semelhantes às apresentadas pelos sujeitos das pesquisas anteriormente citadas, fato que objetivávamos testar. Em seguida, aplicamos as outras oito atividades com o intuito de abordarmos questões específicas a respeito da densidade.

A terceira iniciou a discussão propriamente da questão da densidade. Nela sugeriu-se o procedimento usual da média aritmética, procedimento este que foi utilizado pelos professores, sem dificuldades, para encontrar números racionais entre outros dois, inclusive localizando-os na reta real. No caso em que cada um dos números era representado em registros diferentes (fracionário e decimal), os participantes fizeram a conversão para um mesmo registro, na maioria das vezes, para o decimal, antes de calcular a média entre eles.

No entanto, para discutir a densidade do conjunto dos números irracionais no conjunto dos reais, tal procedimento não se aplica. Nesse caso, apelamos para um procedimento, inspirado no processo da diagonalização de Cantor, utilizando a representação decimal infinita dos números reais, sugerindo a troca de um ou mais algarismos nesta representação.

A partir da quarta atividade e, escolhendo dois números cada vez mais próximos um do outro, procuramos escolher suas representações em registros que mais favorecessem os tratamentos a serem realizados ao mesmo tempo em que buscamos promover coordenação entre registros, no intuito de, ao ordenar números próximos uns dos outros e representá-los na reta real, cada vez mais fosse ficando evidenciada a propriedade da densidade nos números reais.

A seguir, reproduzimos as questões da atividade IV, observando que as seguintes até a IX, apresentam basicamente a mesma estrutura, variando conforme as situações que estão sendo focadas.

Seja um número cuja representação decimal não periódica é 1,232425... . Compare-o com o número cuja representação é 1,332425... que difere do primeiro apenas por um algarismo.

1. O segundo número é uma dízima periódica? Por quê?
2. O 2º número é racional ou irracional? E o 1º ? Comente sua resposta.
3. O segundo número é maior que o primeiro? Ordene-os.
4. Dê a representação decimal de um número irracional entre estes dois números.
5. Ordene esses três números.
6. Dê a representação decimal de um número irracional entre 1,232425... e o obtido na questão 4.
7. Ordene os quatro números.
8. Dê a representação decimal de um número irracional entre o obtido na questão 4 e 1,332425.
9. Ordene os cinco números.
10. Ache um número irracional entre os obtidos nas questões 6 e 8.
11. Quantos números irracionais existem entre 1,232425... e 1,332425 ? Comente sua resposta.
12. Se você iniciasse escolhendo dois números irracionais quaisquer, seria possível encontrar números irracionais ente eles? Quantos? Por que?

O novo procedimento sugerido pelas questões propostas não suscitou muitas dúvidas, os trabalhos transcorreram tranquilamente porque os participantes perceberam, sem grandes dificuldades, o processo de trocar um ou mais algarismos da representação decimal infinita um número para se obter a representação de um outro número, maior ou menor que aquele, conforme o que se pretenda e, desse modo, poder apresentar sempre um número irracional entre dois irracionais.

Com a atividade V discute-se a existência de números racionais entre dois irracionais. Nas atividades VI e VII, as questões objetivam promover a discussão da existência de infinitos números irracionais entre dois racionais. Na VIII são discutidos os números racionais e irracionais entre um racional (3,14) e um irracional (π), *e* na IX, a existência de números racionais e irracionais entre dois irracionais. A atividade X consta em decidir se são verdadeiras ou falsas, com justificativa, catorze afirmações que contemplam as situações trabalhadas anteriormente.

Na proposta das questões, além de se tentar cobrir todas as situações elencadas, os números para se iniciar as discussões eram escolhidos cada vez mais próximos uns dos outros e em diferentes registros de representação: no registro numérico (decimal ou fracionário) ou no simbólico como é o caso de π. Além disso, sempre que cabia, era solicitada a ordenação de números no registro numérico e também a sua representação na reta numerada, com o intuito de se perceber que, em muitos casos, embora os recursos gráficos não permitam representar muitos números num intervalo de reta de pequena amplitude, ainda assim fica evidente a existência de infinitos números correspondentes a infinitos pontos do intervalo.

Durante todo o experimento, em situações localizadas, pudemos constatar que professores ainda associavam a irracionalidade do número com a infinitude de sua representação, o que mostra que essa associação está fortemente presente nas concepções dos envolvidos e que estas se manifestam na prática, mas às vezes, permanecem mesmo depois deterem sido debatidas.

Esta associação é evidenciada no comentário feito durante a discussão das questões da atividade IX: "*O racional é finito e o irracional é infinito*".

Por outro lado, há a contestação dos acordos tácitos. Por exemplo, a preocupação com as reticências também ficou evidente no diálogo:

"*0,222... não poderia ter outro número depois do dois? O que garante que sempre é dois?"*

"Também não sei, será que eu preciso escrever três vezes o '2' ou apenas uma vez. Tem alguma regra?"

"Quando se colocam os pontinhos é tudo igual."

"Não é isso não, senão sempre teríamos números racionais. Então 0,2... é o que?"

"0,2... e 0,222... são iguais?"

"Acho que não, senão 0,456... seria 0,456456...".

Esta discussão parece indicar que este grupo percebeu que as reticências indicam infinitude e que pode tanto representar repetição de algarismos quanto a não repetição, dízimas periódicas ou não.

Aproveitamos todas essas ocasiões para discutir a questão da representação decimal infinita dos números reais, inclusive dos racionais, como se observa, por exemplo, que 0,4 pode ser representado por 0,3999... Dessa forma colocamos em discussão se o procedimento da busca de um número entre dois outros, trocando convenientemente apenas um algarismo, na representação de um deles não dá conta de todas as situações, dispensando aquele procedimento da média aritmética, quando se tratava de números racionais.

A discussão foi muito producente no sentido de que os professores concluíram que, na verdade o procedimento inspirado no método de Cantor é geral e, portanto, poderia ser o único utilizado, mas que sob o ponto de vista didático, para trabalhar com seus alunos, parece ser mais producente começar mesmo com os números racionais e ir calculando um número entre dois dados, pelo processo da média aritmética, por estar este muito mais próximo da realidade dos alunos.

Esta conclusão mostra de maneira cabal que os professores perceberam muito bem qual é a finalidade da educação continuada, uma vez que não a desvincularam da sua atuação em sala de aula no momento em que lês desenvolviam as atividades propostas. Além disso, também mostraram não só que julgam viável o início do estudo da propriedade da densidade dos números reais com seus alunos, como também que a estrutura das atividades trabalhadas por eles pode ser adaptada para num trabalho de sua docência.

Destacamos também que um dos grupos questionou a bi univocidade entre os pontos da reta e os números reais, argumentando que se um número tem representação decimal infinita, o ponto a ele correspondente "pode variar" de acordo com o número de casas decimais representadas. Aqui fica evidenciada a identificação do número com sua representação, pois dependendo da quantidade de casas decimais escritas, cada representação de um mesmo número parece referir-se a números diferentes.

Em algumas respostas, a linguagem utilizada pelos sujeitos, muitas vezes, é desprovida de precisão matemática como, por exemplo, ao expressar que entre os números $\frac{3}{11}$ e $\frac{4}{11}$, um grupo escreveu que há: "$\frac{3,1}{11}$ e $\frac{3,2}{11}$", sem o cuidado de representar o número racional como quociente de dois números inteiros e ainda um outro que representou 1,242425 como $\frac{1,242425}{1000000}$, mantendo a vírgula no numerador.

Outro exemplo pode ser encontrado no comentário: "É irracional porque não sabemos o último número de 0,123456789101112...", em que os participantes deste grupo usaram "último número" possivelmente querendo se referir a algarismo, pois se o número tivesse representação decimal finita seria racional e não irracional.

Ainda um outro grupo, ao ser solicitada a ordenação de três números, apresentou o seguinte: "1,333 , 1,3330 , 1,3331". Não evidenciando a percepção de que as duas primeiras representações são de um mesmo número, associando duas representações diferentes a dois números distintos.

Esta ocorrência está em desacordo com o que preceitua Duval, ao explicitar que uma representação não deve ser tomada no lugar do objeto. Segundo esse autor, tal associação pode dificultar a apreensão do conhecimento.

A alegação para um grupo de que 3,1415... era menor que 3,141555..., provavelmente indica que não percebeu que, pelo fato de não se conhecer a quinta casa decimal de 3,1415..., não se poderia afirmar que um número era menor que o outro.

Apesar disso, fomos percebendo no transcorrer das atividades, o envolvimento efetivo dos participantes, que incorporavam em suas repostas, resultados das discussões realizadas em sessões anteriores. Este fato fica evidenciado no comentário feito por um professor ao se deparar com o enunciado das questões da atividade IX, cujo objetivo era obter números tanto racionais quanto irracionais entre os números irracionais 0,10100100001... e 0,10100100010..., em que a diferença nas representações decimais está na 10ª e 11ª casas: "Cada dia ela (a professora) está diminuindo mais, mas nunca vai conseguir, pois é infinito". Para esse participante está claro que, apesar da diminuição da distância entre os números, sempre haverá infinitos números entre eles, em outras palavras, a reta é densa.

Nessa mesma direção podem ser colocados os comentários de outros dois professores ao trabalharem a atividade X:

"Se esta folha fosse trabalhada no primeiro dia, não estaria tão claro"

"Sim, porque se não fosse, a reta teria falhas" ao justificar sua classificação como verdadeira a afirmação: *'É sempre possível encontrar um número irracional entre dois irracionais'.*

Mais de uma vez houve posicionamentos dos professores que indicam sua aprovação na formatação do instrumento empírico apresentado e na viabilidade da introdução do estudo da densidade na escola básica. Destacamos as seguintes falas ocorridas em discussão plenária:

"Depois que se acha o primeiro (número) fica fácil achar os outros".

"Acho que o aluno do ensino médio acompanha o raciocínio se for bem devagar, primeiro racional entre racionais e assim vai indo".

No reencontro com os participantes da pesquisa, após um espaço de dois meses, dois deles relataram terem utilizado parcialmente algumas questões da seqüência de ensino em atividades com seus alunos, classificando como muito produtivos, os resultados alcançados.

O primeiro expressou que trabalhou com seus alunos especificamente as questões da atividade III, que tratava da obtenção de números racionais entre dois racionais por meio da média aritmética. Relatou que seus alunos questionaram o significado de número racional. Uma vez esclarecido isso, relata o professor que seus estudantes resolveram as questões propostas.

O segundo revelou que, em seu planejamento escolar para a primeira série do ensino médio, não incluiu o tema de número irracional, seguindo a orientação de um colega que estava há mais tempo na escola. Apesar disso, num momento que julgou oportuno, tratando de números reais, inseriu as noções de números racional e irracional e propôs algumas questões retiradas das atividades desenvolvidas na intervenção.

Considerações finais

A epistemologia histórica desvela, ao longo da gênese dos números reais, obstáculos na compreensão da necessidade da construção de um sistema capaz de substituir o geométrico, para isso, satisfazendo as propriedades daquele, em especial, a densidade e a continuidade; tais dificuldades se revelam no ensino, notadamente nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral, no estudo de continuidade e limite de funções. Nosso trabalho deu singelas mostras que o encaminhamento de certas questões pode contribuir para a compreensão da propriedade da densidade e, talvez mesmo da continuidade da reta real, por parte de estudantes do ensino médio.

O ensino e aprendizagem dos números reais, como mostram pesquisas nacionais e internacionais, apresentam dificuldades muitas das quais, de difícil superação. Uma delas, a associação entre número racional e sua representação decimal infinita, tem presença garantida nos resultados das investigações realizadas em diferentes países e diferentes níveis de ensino. No desenrolar deste trabalho, em diversas situações, ela se manifestou mesmo depois de ter sido analisada e discutida com o coletivo dos participantes. Isto reforça a idéia de que uma concepção, em geral, se manifesta na pratica, mas essa manifestação está muito longe de ela ser modificada. Foi a exaustiva constatação de tantas e tão sérias dificuldades apresentadas por estudantes que iniciam o curso de licenciatura em matemática, que não diferem muito daquelas apresentadas por concluintes do curso, que nos levou à indagação se não seria viável introduzir o estudo de propriedades dos números reais na educação básica.

A intervenção se deu com professores da rede pública que, pelo fato de estarem participando de um projeto de educação continuada, demonstram que estão preocupados com o ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos, fato que muito contribuiu para o desenvolvimento das questões que visavam discutir a possibilidade de se iniciar o estudo da densidade no ensino médio. O procedimento de se determinar um número racional entre dois outros, calculando-se a sua média aritmética se revelou bastante eficaz e não trouxe qualquer dificuldade para os participantes. Também o procedimento inspirado na diagonalização de Cantor para a obtenção de um número irracional entre dois irracionais ou um irracional e um racional também se revelou adequado, apesar de não ser usual sua utilização na educação básica.

Assim sendo somos levados a concluir que sobre a questão específica da densidade dos números reais, que os professores se apropriaram dos procedimentos apresentados, como podem sugerir os comentários:

"As sucessivas médias vão se aproximar cada vez mais de um número, o espaço entre eles sempre vai existir, mas vai diminuir".

"Com a substituição de um ou mais algarismos fica claro que existem infinitos números irracionais entre dois irracionais".

A intervenção permitiu constatar que a sequência apresentada não foi encarada como um modelo pronto e acabado a ser seguido, mais foi muito bem recebida pelos professores, uma vez que pudemos constatar que a maioria deles, ao resolver questões, recorria às suas respostas anteriores, podendo isso indicar que, possivelmente houve uma tentativa de reprodução do procedimento sugerido em atividades anteriores.

Além da questão específica da propriedade da densidade dos números reais, pudemos também constatar que a oportunidade de se trabalharem atividades numa perspectiva colaboracionista, embora contemplando conteúdos não triviais, teve boa receptividade por parte dos professores participantes. Seu desenvolvimento se deu com entusiasmo e seriedade, e houve um grande empenho na resolução e discussão das questões como podem traduzir nos seguintes comentários:

"*Vou estudar isso e depois a gente conversa*", referindo-se à igualdade: 0,999... = 1".

"*Percebi como tenho defasagem, a gente só estuda o que dá aula*", mostrando que provocamos, como se pretendia, inquietações e motivações para o estudo.

"*O bacana disso é a discussão que vem depois*".

O trabalho em grupos foi encarado como fator positivo para a realização do experimento. Houve comentários em seu favor ao explicitarem que modificaram sua opinião a partir da discussão com os colegas, tanto no interior do grupo quanto na plenária.

Os resultados da investigação nos instigam a conjecturar que diversificadas dificuldades apontadas em inúmeras pesquisas em Educação Matemática a respeito da aprendizagem dos números reais podem ser enfrentadas muito antes do nível universitário desde que se identifiquem as propriedades que fundamentos esses números e que se proponham e desenvolvam intervenções junto a alunos e professores da educação básica, com procedimentos 'simples' de serem trabalhados, mas que envolvam elementos do pensamento matemático avançado. Esta proposta de introdução ao estudo da densidade, acreditamos, pode ser ponto de partida para outras não só relativas à densidade como também à continuidade dos números reais, inspiradas nos corte de Dedekind, que foi buscar fundamentação na definição de proporção de Eudoxo.

Referências

ARTIGUE, M. et alli. (1995) Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 33-59; 97-137.

BOYER, C. B. (1974). *História da Matemática*. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blücher,

BRASIL (1998). Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: Matemática. Brasília: MEC/SEF.

CARAÇA, B. de J. (1989). Conceitos fundamentais da Matemática. Lisboa, Livraria Sá da Costa Editora.

DAMM, R. F. (1999). Registros de Representação. In: MACHADO, S. D. A. *Educação Matemática, uma introdução.* São Paulo, EDUC, p p.135-153.

DANTZIG, T. (1970). *Número – a linguagem da ciência***.** Tradução: Sérgio Góes de Paula. Rio de Janeiro, Zahar Editores.

DUVAL, R.(1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la penseé. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, vol. 5. IREM-ULP, Strasbourg, pp. 37-65.

_____ (2003). Registros de representação semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. *Aprendizagem em Matemática. Registros de Representação Semiótica*. Campinas, Papirus, pp. 11-33.

FISCHBEIN, E.; JEHIAN, R.; COHEN, D. (1995). *The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers*. Educational Studies in mathematics. Boston, Kluwwer Academic Publishers. 29, pp. 29-44.

KATZ, V. J. (1993). *A History of Mathematics: an introduction*. New York. Harper Collins College Publishers.

LIMA, E. L. (1977) *Análise Real*. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, v. 1.

_____. (2003). *Espaços Métricos*. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada – CNPq, 1977.

MINISTÉRIO DE EDUCAÇÃO E CULTURA. *Exame Nacional de Cursos*. Disponível em: http://web.inep.gov.br//superior/provão Acesso em 14 de maio de 2003.

_____ (2000). *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio*.

MORENO – ARMELLA. L. E.; WALDEGG G. C. (2002). An epistemological history of number and variation. In: KATZ, V. J. *Using history to teach mathematics*. Washington, Mathematical Association of America, v. 51, p. 183-190.

NIVEN, I. (1984). *Números: Racionais e Irracionais*. Traduzido por Renate Watanabe. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática.

PENTEADO, C. B. (2004). *Concepções do professor do Ensino Médio relativas à densidade dos números reais e suas reações frente a procedimentos para a abordagem desta propriedade.* Dissertação de mestrado. PUC-SP.

_____ (2005). Reações de professores do ensino médio frente a questões relativas à densidade dos números reais. Londrina. Anais do III Congresso Internacional de Ensino de Matemática.

ROBINET J. (1993). Les réels: quels modèles ont les élèves?. Cahier de didactique des mathématiques nº 21, I.R.E.M. Université Paris 7.

ROGALSKI, M. (1994). *Les nombres reels: comment en faire parler en t. d. avant de les enseigner en cours?*

SILVA, B. A.; IGLIORI, S. B. C. (1998). O que número real para estudantes que iniciam a Universidade? E para os que a finalizam? Caracas. Ed. Universidade Nacional da Venezuela. Anais do III Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática.

______ (2001). Concepções dos alunos sobre números reais. In: LAUDARES, João Bosco, LACHINI, Jonas. *Educação matemática: a prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo.* Belo Horizonte, FUMARC, pp. 39-67.

SILVA, B. A.; PENTEADO, C. B. (2005). A questão da densidade dos números reais. Porto – Portugal. Ed. Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. Anais do V Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática.

______ (2006). Concepções de professores do ensino médio do Brasil a respeito da densidade do conjunto dos números reais. Águas de Lindóia. Anais da VII Reunião de Didática da Matemática do Cone Sul.

SOARES, E. F. E.; FERREIRA, M. C. C.; MOREIRA, P. C. (1999). *Números reais: concepções dos licenciandos e formação Matemática na licenciatura*. Zetetiké, Campinas, v. 7, n.12, pp. 95–117, jul/dez.

STEVIN, S. (1980). La Disme. In: *Reproduction de textes anciens*. IREM, Paris VII, pp. 3-10.