Análise I

Notas de Aula [1]

Alex Farah Pereira [2] [3]

22 de Novembro de 2017

[1] Turma de Matemática.
[2] Departamento de Análise-IME-UFF
[3] http://alexfarah.weebly.com

Conteúdo

1

Conjuntos

1.1 Números Naturais

Todos aprendemos que os números de contagem são chamados de **números naturais** e representados da seguinte forma

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

A formalização da matemática nos ajuda a construir os objetos matemáticos. O ponto de partida para a construção desses objetos são chamados de **axiomas** [1].

O conjunto dos números naturais é caracterizado pelos seguintes fatos:

1. Todo número natural tem um sucessor, que ainda é um número natural. Além disso, números diferentes têm sucessores diferentes;

2. Existe um único número natural, denotado por 1, que não é sucessor de nenhum outro;

3. Se um conjunto de números naturais contém o número 1 e contém também o sucessor de cada um dos seus elementos, então esse conjunto contém todos os números naturais.

Essas três propriedades são conhecidas como os ***axiomas de Peano***[2] [3]. O axioma 3 é conhecido como o ***princípio da indução***. Matematicamente, esses axiomas são escritos da seguinte maneira:

[1] substantivo masculino 1. fil premissa considerada necessariamente evidente e verdadeira, fundamento de uma demonstração, porém ela mesma indemonstrável, originada, segundo a tradição racionalista, de princípios inatos da consciência ou, segundo os empiristas, de generalizações da observação empírica [O princípio aristotélico da contradição ("nada pode ser e não ser simultaneamente") foi considerado desde a Antiguidade um axioma fundamental da filosofia.]. 2. p.ext. máxima, provérbio, sentença.

[2] `https://pt.wikipedia.org/wiki/Axiomas_de_Peano`

[3] Giuseppe Peano - `https://pt.wikipedia.org/wiki/Giuseppe_Peano`

1. Existe uma função injetiva $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$. A imagem $s(n)$ de cada número natural $n \in \mathbb{N}$ chama-se o sucessor de n;

2. Existe um único número natural, denotado por $1 \in \mathbb{N}$, tal que $1 \neq s(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$;

3. Se um conjunto $X \subset \mathbb{N}$ é tal que $1 \in X$ e $s(X) \subset X$, então $X = \mathbb{N}$.

O princípio da indução serve de base para um método de demonstração de teoremas sobre números naturais, conhecido como o ***método de indução***: "se uma propriedade P é válida para o número 1 e se, supondo P válida para o número n daí resultar que P é válida também para seu sucessor $s(n)$, então P é válida para todos os números naturais". Por exemplo, provaremos por indução a seguinte propriedade

$$P: \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, \text{tem-se } s(n) \neq n.$$

De fato, esta afirmação é válida para $n = 1$ pois, pelo axioma 2, segue que $1 \neq s(n)$ para todo n, em particular, $1 \neq s(1)$. Supondo-a verdadeira para um certo $n \in \mathbb{N}$, vale $n \neq s(n)$. Como a função s é injetiva, resulta $s(n) \neq s(s(n))$, isto é, afirmação é verdadeira para $s(n)$.

Denotamos então $2 = s(1)$ (2 é o sucessor de 1), $3 = s(2)$ (3 é o sucessor de 2), $4 = s(3)$ (4 é o sucessor de 3), etc....

Definimos no conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais duas operações fundamentais: adição, que associa a cada par de números (m, n) sua soma $m + n$, e a multiplicação, que corresponde ao par (m, n) seu produto $m.n$. Essas operações são caracterizadas pelas seguintes igualdades:

- $m + 1 = s(m)$;
- $m + s(n) = s(m + n)$;
- $m.1 = m$;
- $m.s(n) = m.n + m$.

Para mais detalhes quanto a existência e unicidade das operações dos números naturais veja na referência "Curso de Análise, vol 1., Elon Lages Lima". É possível demonstrar por indução as seguintes propriedades:

- associatividade: $(m + n) + p = m + (n + p)$;
- distributividade: $m.(n + p) = m.n + m.p$;
- comutatividade: $m + n = n + m \quad m.n = n.m$;
- lei do corte: $m + n = m + p \Longrightarrow n = p \quad m.n = m.p \Longrightarrow n = p$.

Vamos agora definir uma **relação de ordem**[4] em $\mathbb{N}$, ou seja, um jeito de compararmos números naturais. Dados $m, n \in \mathbb{N}$, dizemos que $m < n$ quando existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$. Neste caso, diz-se que m é menor do que n. A notação $m \leq n$ significa que $m < n$ ou $m = n$. Com esta definição, dados $m, n, p \in \mathbb{N}$ é possível provar que vale a propriedade

- transitividade: $m < n\,,\, n < p \Longrightarrow m < p$;

além disso, vale uma, e somente uma, das três alternativas:

$$m = n \quad \text{ou} \quad m < n \quad \text{ou} \quad n < m.$$

Para cada número $n \in \mathbb{N}$, chamaremos I_n o conjunto dos números naturais $\leq n$, isto é, $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. A relação de ordem definida no conjunto dos números naturais nos permite provar o seguinte

Teorema 1.1.1. *(Princípio da boa-ordenação) Todo subconjunto não vazio $A \subset \mathbb{N}$ possui um menor elemento, isto é, um elemento $n_0 \in A$ tal que $n_0 \leq n$ para todo $n \in A$.*

Demonstração. Se $1 \in A$, então 1 é o menor elemento de A. Supondo agora que $1 \notin A$, consideremos o conjunto $X = \{m \in \mathbb{N}\,;\, I_m \subset \mathbb{N} \setminus A\}$. Vemos que $1 \in X$ já que $I_1 = \{1\} \subset \mathbb{N} \setminus A$. Por outro lado, como $A \neq \emptyset$, temos que $X \neq \mathbb{N}$. Daí segue que não vale o axioma 3, isto é, existe $n \in X$ tal que $n + 1 \notin X$. Então $I_n \subset \mathbb{N} \setminus A$ mas $n_0 = n + 1 \in A$. Logo n_0 é o menor elemento de A. $\square$

1.2 Conjuntos Finitos e Infinitos

Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotaremos $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Dizemos que um conjunto X é **finito** quando X é vazio ou quando existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi : I_n \longrightarrow X$ é uma função bijetiva. A **cardinalidade** do conjunto X, denotado por $\operatorname{card} X$, é o número de elementos de X. Se $X = \emptyset$, então $\operatorname{card} X = 0$, e se existe bijeção $\varphi : I_n \longrightarrow X$, então $\operatorname{card} X = n$.

Segue direto da definição que X tem n elementos se, e somente se, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ onde $x_i \neq x_j$ para todos $1 \leq i \neq j \leq n$. Abaixo, enunciaremos algumas propriedades sobre conjuntos finitos. As demonstrações ficam como exercício.

Proposição 1.2.1. *Sejam X e Y conjuntos não vazios e $f : X \longrightarrow Y$ uma função.*

(a) Se $X \subset Y$ e Y é finito, então X é finito e $\operatorname{card} X \leq \operatorname{card} Y$.

(b) Se f é uma bijeção, então X é finito se, e somente se, Y é finito. Neste caso $\operatorname{card} X = \operatorname{card} Y$.

[4] No capítulo 2 definiremos com mais rigor este conceito.

(c) *Se f é injetiva e Y é finito, então X é finito e* $\mathit{card}\, X \leq \mathit{card}\, Y$.

(d) *Se f é sobrejetiva e X é finito, então Y é finito e* $\mathit{card}\, Y \leq \mathit{card}\, X$.

Corolário 1.2.1. *Se X é um conjunto finito e não vazio, então não existe bijeção entre X e qualquer parte própria de X.*

Proposição 1.2.2. *Sejam $X_1, \ldots, X_n$ conjuntos finitos e não vazios. Temos que*

(a) $\bigcup_{i=1}^{n} X_i$ *é finito e* $\mathit{card}(\bigcup_{i=1}^{n} X_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathit{card}\, X_i$. *Se os X_i são dois a dois disjuntos, então* $\mathit{card}(\bigcup_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathit{card}\, X_i$.

(b) $\Pi_{i=1}^{n} X_i$ *é finito e* $\mathit{card}(\Pi_{i=1}^{n} X_i) = \mathit{card}\, X_1 \cdot \ldots \cdot \mathit{card}\, X_n$.

Seja X um subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$. Dizemos que X é **limitado** quando existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \leq N$ para todo $n \in X$. A proposição a seguir define uma caracterização dos conjuntos finitos.

Proposição 1.2.3. *Se X é um subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$, então X é finito se, e somente se, X é limitado.*

Dizemos que um conjunto X é **infinito** quando X não é finito, isto é, $X \neq \emptyset$ e para todo $n \in \mathbb{N}$ não existe nenhuma bijeção entre I_n e X.

Por exemplo, o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ é infinito. Com efeito, sendo $\mathbb{P} = \{2, 4, \ldots, 2n, \ldots\}$, temos que $\mathbb{P} \underset{\neq}{\subset} \mathbb{N}$ e a função $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{P}$ dada por $f(n) = 2n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ é bijetiva, o que mostra que existe uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e uma parte própria de $\mathbb{N}$.

Proposição 1.2.4. *Sejam X e Y conjuntos não vazios e $f : X \longrightarrow Y$ uma função.*

(a) *Se $X \subset Y$ e X é infinito, então Y é infinito.*

(b) *Se f é bijetiva, então X é infinito se, e somente se, Y é infinito.*

(c) *Se f é injetiva e X é infinito, então Y é infinito.*

(d) *Se f é sobrejetiva e Y é infinito, então X é infinito.*

1.3 Conjuntos Enumeráveis

Dizemos que um conjunto X é **enumerável** quando X é finito ou quando existe uma bijeção $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow X$.

Segue direto da definição que X é um conjunto infinito e enumerável se, e somente se, $X = \{x_n \,;\, n \in \mathbb{N}\}$ onde os x_n são distintos.

Por exemplo, é claro que o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ é enumerável. Mais ainda, o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ é enumerável, basta considerar a bijeção $\psi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ onde

$$\psi(n) = \begin{cases} 2n\,,\, n > 0\,; \\ -2n+1\,, n \leq 0. \end{cases}$$

Vamos denotar por $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$.

Proposição 1.3.1. *Se X é um conjunto infinito, então existe um subconjunto A de X tal que A é infinito e enumerável.*

Demonstração. Seja X um conjunto infinito. Logo $X \neq \emptyset$. Tome $x_1 \in X$. Considere $X_2 = X \setminus \{x_1\}$. Logo X_2 é infinito e daí $X_2 \neq \emptyset$. Tome $x_2 \in X_2$ e considere $X_3 = X_2 \setminus \{x_2\} = X \setminus \{x_1, x_2\}$. Logo X_3 é infinito e daí $X_3 \neq \emptyset$. Continuando com este processo, determinamos elementos $x_n \in X$ tais que $x_1 \in X$ e $x_n \in X \setminus \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$. Seja $A = \{x_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$. Como os x_n são distintos temos que A é enumerável. De outra forma $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow A$ onde $\varphi(n) = x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ é bijetiva. $\square$

As demonstrações das proposições a seguir são similares ao caso de conjuntos finitos e por isso ficam como exercício.

Proposição 1.3.2. *Sejam X e Y conjuntos não vazios e $f : X \longrightarrow Y$ uma função.*

(a) Se $X \subset Y$ e Y é enumerável, então X é enumerável.

(b) Se f é bijetiva, então X é enumerável se, e somente se, Y é enumerável.

(c) Se f é injetiva e Y é enumerável, então X é enumerável.

(d) Se f é sobrejetiva e X é enumerável, então Y é enumerável.

Proposição 1.3.3. *Sejam X_i, $i \in \mathbb{N}$ conjuntos enumeráveis.*

(a) $\bigcup_{i=1}^{+\infty} X_i$ é enumerável.

(b) $X_1 \times \ldots \times X_n$ é enumerável

O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q} = \{p/q\,;\, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^*\}$ é enumerável. Com efeito, a função $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \longrightarrow \mathbb{Q}$ definida por $f(p, q) = p/q$ para todos $p, q \in \mathbb{Z}$ com $q \neq 0$ é sobrejetiva.

Daremos agora um exemplo de um conjunto que não é enumerável. Seja

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\} \times \ldots,$$

isto é, $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)\,;\, x_n \in \{0,1\}\,\forall n \in \mathbb{N}\}$. Suponhamos, por absurdo, que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ é enumerável. Logo

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots\}.$$

Temos então que $s_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik}, \ldots)$, onde $x_{ij} \in \{0,1\}$, para todos $i, j \in \mathbb{N}$. Seja $s = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ onde $a_i \neq x_{ii}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Deste modo, $s \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ mas $s \neq s_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$ donde $s \notin \{s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots\} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, o que é um absurdo. Portanto $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ não é enumerável.

Na seção anterior, definimos a cardinalidade de um conjunto finito. Mais geralmente, dizemos que os conjuntos X e Y têm a mesma cardinalidade, e denotamos $\operatorname{card} X = \operatorname{card} Y$, quando existe uma bijeção entre X e Y. Consequentemente, se X e Y são finitos, então eles possuem a mesma cardinalidade se, e somente se, têm o mesmo número de elementos. Denotaremos a cardinalidade de $\mathbb{N}$ por $\operatorname{card} \mathbb{N} = \aleph_0$ (leia-se: aleph zero)[5]. Assim, todo conjunto infinito e enumerável tem cardinalidade $\aleph_0$. Por exemplo, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ tem cardinalidade $\aleph_0$. Mais a frente, daremos exemplos de conjuntos não enumeráveis que tem a mesma cardinalidade.

[5]`https://pt.wikipedia.org/wiki/Número_aleph`

2

Números Reais

2.1 Corpo

Seja K um conjunto não vazio munido de duas operações, denominadas adição $(+)$ e multiplicação $(\cdot)$. Dizemos que K é um **corpo** quando satisfaz as seguintes condições: as operações de adição e multiplicação são fechadas em $\mathbb{K}$, isto é,

$$\begin{aligned} + : \ & K \times K \longrightarrow K \\ & (x, y) \mapsto x + y \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \cdot : \ & K \times K \longrightarrow K \\ & (x, y) \mapsto x \cdot y \end{aligned}$$

e valem

(A1) $x + y = y + x$, para todos $x, y \in K$;

(A2) $x + (y + z) = (x + y) + z$, para todos $x, y, z \in K$;

(A3) existe um elemento $0_K \in K$ tal que $x + 0 = x$, para todo $x \in K$;

(A4) para todo $x \in K$, existe $y \in K$ tal que $x + y = 0_K$;

(M1) $x.y = y.x$, para todos $x, y \in K$;

(M2) $x.(y.z) = (x.y).z$, para todos $x, y, z \in K$;

(M3) existe um elemento $1_K \in K$ tal que $x.1_K = x$, para todo $x \in K$;

(M4) para todo $x \in K$, $x \neq 0_K$, existe $y \in K$ tal que $x.y = 1_K$.

(D) $x.(y + z) = x.y + x.z$, para todos $x, y, z \in K$.

Isto significa que as operações de adição e multiplicação em um corpo satisfazem a comutatividade, associatividade, existência do elemento neutro, existência do elemento inverso e distributividade.

Exemplo 2.1.1. $(\mathbb{N}, +, .)$ *e* $(\mathbb{Z}, +, .)$ *não são corpos com as operações usuais de adição e multiplicação.*

Exemplo 2.1.2. $(\mathbb{Q}, +, .)$ *é um corpo onde as operações de adição e multiplicação são definidas da seguinte maneira*

$$\frac{p}{q} + \frac{m}{n} = \frac{pn + mq}{qn} \qquad \frac{p}{q} \cdot \frac{m}{n} = \frac{pm}{qn}$$

para todos $p, q, m, n \in \mathbb{Z}$ *com* $q \neq 0$ *e* $n \neq 0$.

Exemplo 2.1.3. *Denote por* $\mathbb{Q}[x]$ *o conjunto dos polinômios em* $\mathbb{Q}$ *cujos coeficientes são números racionais. Seja* $K = \mathbb{Q}[x]/\mathbb{Q}[x]$*, isto é,*

$$K = \left\{ \frac{p(x)}{q(x)} \,;\, p(x), q(x) \in \mathbb{Q}[x] \text{ e } q(x) \neq 0 \right\}.$$

Definindo adição e multiplicação por

$$\frac{p(x)}{q(x)} + \frac{m(x)}{n(x)} = \frac{p(x)n(x) + m(x)q(x)}{q(x)n(x)} \qquad \frac{p(x)}{q(x)} \cdot \frac{m(x)}{n(x)} = \frac{p(x)m(x)}{q(x)n(x)}$$

para todos $p(x), q(x), m(x), n(x) \in \mathbb{Q}[x]$ *com* $q(x) \neq 0$ *e* $n(x) \neq 0$*, temos que* $(K, +, .)$ *é um corpo. Se trocarmos* $\mathbb{Q}$ *por um corpo* L *qualquer, ainda teríamos que* K *é um corpo?*

Exemplo 2.1.4. *Seja* $K = \{(a, b)\,;\, a, b \in \mathbb{Q}\}$ *munido das operações*

$$\begin{cases} (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d); \\ (a, b).(c, d) = (ac - bd) + (ad + bc) \end{cases}$$

para todos $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$. *Temos que* $(K, +, .)$ *é um corpo.*

Exemplo 2.1.5. *O conjunto* $\mathbb{Z}_2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ *dos inteiros módulo* 2 *com suas operações usuais é um corpo. Mais geralmente, é possível provar que o conjunto dos inteiros módulo* p*, denotado por* $\mathbb{Z}_p$ *é um corpo se, e somente se,* p *é um número primo.*

Em um corpo K, as seguintes afirmações são verdadeiras:

(i) O elemento neutro da adição em K é único e será denotado por 0.

(ii) Se $x, y, z \in K$ são tais que $x + y = x + z$, então $y = z$.

(iii) O elemento inverso da adição é único. Neste caso, para cada $x \in K$, denotaremos seu inverso aditivo por $-x$. Mais ainda, se $x, y \in K$, então $x - y = x + (-y)$.

(iv) O elemento neutro da multiplicação em K é único e será denotado por 1.

(v) Se $x, y, z \in K \setminus \{0\}$ são tais que $x.y = x.z$, então $y = z$.

(vi) O elemento inverso da multiplicação é único. Neste caso, para cada $x \in K \setminus \{0\}$ denotaremos seu inverso multiplicativo por x^{-1} ou $\frac{1}{x}$. Mais ainda, se $x, y \in K$ e $y \neq 0$, então $\frac{x}{y} = x.y^{-1} = x.\frac{1}{y}$.

A verificação dessas afirmações fica como exercício.

Num corpo K, usaremos as seguintes notações: se $x \in K$, então

$$nx = \underbrace{x + \ldots + x}_{n-\text{vezes}} \quad \text{e} \quad x^n = \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{n-\text{vezes}}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

2.2 Corpo Ordenado

Dizemos que K é um **corpo ordenado** quando K é um corpo e existe $P \subset K$ tal que

(i) $0 \notin P$;

(ii) $x + y \in P$ e $x.y \in P$, para todos $x, y \in P$;

(iii) $K = P \cup \{0\} \cup (-P)$ onde $-P = \{-x\,;\, x \in P\}$.

Neste caso, P é dito o conjunto dos elementos positivos de K. Salve indicação contrária, sempre que o corpo for ordenado, iremos inidicar por P o conjunto dos elementos positivos.

A primeira proposição nos dá uma propriedade importante de um corpo ordenado e, em geral, muito útil para mostrarmos quando um corpo K não é ordenado.

Proposição 2.2.1. *Seja K um corpo ordenado. Se $x \in K \setminus \{0\}$, então $x^2 \in P$. Em particular, $1 \in P$.*

Demonstração. Seja $x \in K$ tal que $x \neq 0$. Então por (iii), $x \in P$ ou $x \in (-P)$. Se $x \in P$, temos que $x^2 = x.x \in P$ por (ii). Agora, se $x \in (-P)$, então $x = -y$ onde $y \in P$. Mas $x^2 = (-y).(-y) = y \in P$ por (ii) já que $y \in P$. Portanto, em qualquer um dos casos provamos que $x^2 \in P$. Em particular, $1 \neq 0$ e $1 = 1^2 \in P$. $\square$

Exemplo 2.2.1. *O conjnuto $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado pois claramente vemos que o subconjunto $P = \{x \in \mathbb{Q}\,;\, x > 0\}$ é o conjunto dos elementos positivos de $\mathbb{Q}$.*

Exemplo 2.2.2. *O corpo $K = \{(a, b)\,;\, a, b \in \mathbb{Q}\}$ definido no exemplo 2.1.4 não é ordenado. Com efeito, suponhando K ordenado, o elemento $(0, 1) \in K$, $(0, 1) \neq (0, 0)$ e $(0, 1)^2 = -(1, 0) \in (-P)$ pois $(1, 0) \in P$, e isto contraria a proposição anterior.*

Exemplo 2.2.3. *O corpo dos inteiros módulo* 2 *não é ordenado pois, caso contrário, como* $\overline{1} \in P$ *teríamos* $\overline{0} = \overline{1} + \overline{1} \in P$*, o que é um absurdo. Analogamente, se* p *é um número primo, então o corpo* $\mathbb{Z}_p$ *não é ordenado.*

Seja K um corpo ordenado. Definimos $<$ uma relação sobre K da seguinte maneira: para todos $x, y \in K$, temos

$$x < y \iff y - x \in P.$$

Notação: $y > x$ é equivalente à $x < y$.

Proposição 2.2.2. *Seja* K *um corpo ordenado. Se* $x, y, z \in K$*, então valem as seguintes afirmações:*

(a) $x \in P$ *se, e somente se,* $0 < x$*;*

(b) $x = y$ *ou* $x < y$ *ou* $y < x$*;*

(c) se $x < y$ *e* $y < z$*, então* $x < z$*;*

(d) se $x < y$*, então* $x + z < y + z$*;*

(e) se $x < y$*, então* $x.z < y.z$ *para* $0 < z$ *e* $y.z < x.z$ *para* $z < 0$*.*

Demonstração. Exercicio. □

Seja K um corpo ordenado. Definimos $\leq$ uma relação sobre K da seguinte maneira: para todos $x, y \in K$, temos

$$x \leq y \iff y - x \in P \cup \{0\}.$$

O conjunto $P \cup \{0\}$ é chamado o conjunto dos elementos não negativos de K. Notação: $y \geq x$ é equivalente à $x \leq y$.

Proposição 2.2.3. *Sejam* K *um corpo ordenado. A relação* $\leq$ *definida anteriormente é reflexiva, antissimétrica e transitiva, isto é, para todos* $x, y, z \in K$*, temos*

(a) $x \leq x$*;*

(b) se $x \leq y$ *e* $y \leq x$*, então* $x = y$*;*

(c) se $x \leq y$ *e* $y \leq z$*, então* $x \leq z$*.*

Demonstração. Exercício. □

A proposição anterior nos diz que a relação $\leq$ num corpo ordenado é uma **relação de ordem**. É possível, em certos conjuntos, definirmos uma relação de ordem porém nem todos os elementos são "comparáveis". Por exemplo, se X é um conjunto não vazio, considere em $\mathcal{P}(X)$ (o conjunto das partes de X), a seguinte relação

$$A \leq B \iff A \subset B$$

para $A, B \in \mathcal{P}(X)$. Nem sempre, dados $A, B \subset X$, temos $A \subset B$ ou $B \subset A$, de modo que essa ordem vale somente para alguns elementos de $\mathcal{P}(X)$. Neste caso, dizemos que $\leq$ é uma **relação de ordem parcial** e que $\mathcal{P}(X)$ é um conjunto parcialmente ordenado.

A proposição a seguir nos diz que o corpo dos números racionais $\mathbb{Q}$ pode ser "mergulhado"em qualquer corpo ordenado, ou simplesmente, dizemos que todo corpo ordenado contém o corpo dos racionais. Mais precisamente,

Proposição 2.2.4. *Seja K um corpo ordenado. Existe uma função injetiva $f : \mathbb{Q} \longrightarrow K$. Em particular, K é um conjunto infinito.*

Demonstração. Daremos a ideia da construção desta função. Os detalhes da demonstração ficam à cargo do leitor.

Seja $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow K$ definida por $\varphi(n) = n.1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Desta forma φ é injetiva. Em particular, como $\mathbb{N}$ é infinito, temos que K é infinito. Agora, defina $\psi : \mathbb{Z} \longrightarrow K$ onde

$$\psi(n) = \begin{cases} \varphi(n), & n > 0 \\ 0, & n = 0 \\ -\varphi(-n), & n < 0 \end{cases}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Então ψ definida desta maneira é injetiva. Por fim, considere $f : \mathbb{Q} \longrightarrow K$ dada por $f(p/q) = \psi(p)/\psi(q)$ para todo $p/q \in \mathbb{Q}$. Assim, f é injetiva. $\square$

Seja K um corpo ordenado. Para cada $x \in K$, definimos o **valor absoluto** de x, denotado por $|x|$, do seguinte modo

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} .$$

Proposição 2.2.5. *Sejam K um corpo ordenado e $x, y \in K$. Valem as seguintes propriedades:*

(a) $|x| = 0$ *se, e somente se,* $x = 0$*;*

(b) $x \leq |x|$ *e* $-x \leq |x|$*;*

(c) $|x.y| = |x|.|y|$*;*

(d) $|x + y| \leq |x| + |y|$*;*

(e) para todos $a, \epsilon \in K$, $\epsilon > 0$*, temos* $|x - a| < \epsilon$ *se, e somente se,* $a - \epsilon < x < a + \epsilon$*.*

Demonstração. Exercício. □

A propriedade (d) da proposição anterior é chamada **desigualdade triangular**.

2.3 Corpo Ordenado Completo

Sejam K um corpo ordenado e X um subconjunto não vazio de K. Dizemos que X é

(i) **limitado superiormente** em K quando existe $b \in K$ tal que $x \leq b$ para todo $x \in X$. Neste caso, dizemos que b é uma **cota superior** de X;

(ii) **limitado inferiormente** em K quando existe $a \in K$ tal que $a \leq x$ para todo $x \in X$. Neste caso, dizemos que a é uma **cota inferior** de X;

(iii) **limitado** em K quando existe $c \in K$ tal que $|x| \leq c$ para todo $x \in X$.

Exemplo 2.3.1. *O conjunto $\{x \in \mathbb{Q}\,;\, x < 1\}$ é limitado superiormente mas não é limitado inferiormente em $\mathbb{Q}$.*

Exemplo 2.3.2. *O conjunto $\{\frac{1}{n}\,;\, n \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto limitado inferiormente por 0 e limitado superiormente por 1 em $\mathbb{Q}$ e, portanto, limitado.*

Exemplo 2.3.3. *Se K é um corpo ordenado e $a, b \in K$, então o conjunto*

$$(a, b) = \{x \in K\,;\, a < x < b\}$$

é um conjunto limitado. Em particular, o conjunto (a, b) é limitado em K. Analogamente, os conjnutos

$$[a, b] = \{x \in K\,;\, a \leq x \leq b\},$$

$$(a, b] = \{x \in K\,;\, a < x \leq b\}$$

e

$$[a, b) = \{x \in K\,;\, a \leq x < b\}.$$

são limitados em K.

Lembramos que $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado e que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$. Sabemos que $\mathbb{N}$ é infinito. Mais ainda, vale

Proposição 2.3.1. *O conjunto dos números naturais é limitado inferiormente mas não é limitado superiormente em $\mathbb{Q}$.*

Demonstração. Por definição, $1 \leq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e, portanto, $\mathbb{N}$ é limitado inferiormente em $\mathbb{Q}$. Vejamos agora que $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente em $\mathbb{Q}$. Suponhamos que exista $p/q \in \mathbb{Q}$ com $p, q \in \mathbb{N}$ tal que $n \leq p/q$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $p \in \mathbb{N}$ temos $p+1 \in \mathbb{N}$. Então

$$p+1 \leq \frac{p}{q} \Longleftrightarrow pq+q \leq q \Longleftrightarrow q \leq \frac{p}{p+1} < 1.$$

Isto é, $0 < q < 1$, o que é um absurdo! Assim, $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente em $\mathbb{Q}$. □

Note que a proposição anterior nos diz que dado $p/q \in \mathbb{Q}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $p/q < n$.

Proposição 2.3.2. *Seja K um corpo ordenado. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente em K;

(b) para todos $a, b \in K$, $a > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n.a > b$;

(c) para todo $a \in K$, $a > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < a$.

Demonstração. $(a) \Rightarrow (b)$
Dados $a, b \in K$ com $a > 0$, temos que $\frac{b}{a} \in K$. Como $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{b}{a} < n$. Daí, $n.a > b$.
$(b) \Rightarrow (c)$
Basta tomar $b = 1 \in K$ em (b).
$(b) \Rightarrow (c)$
Suponhamos que $\mathbb{N}$ seja limitado superiormente. Seja $b \in K$ uma cota superior de $\mathbb{N}$. Como $b > 0$, então $\frac{1}{b} \in K$ e $\frac{1}{b} > 0$. Por (c), existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{b}$ e daí $b < n$. Isto contradiz o fato de b ser uma cota superior de $\mathbb{N}$. Portanto, $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente. □

Dizemos que um corpo ordenado K é **arquimediano** quando vale uma (e, portanto, todas) das três propriedades em K. A Proposição 2.3.1 nos diz que $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado arquimediano.

Sejam K um corpo ordenado e X um subconjunto não vazio de K. Dizemos que $b \in K$ é o **supremo** de X quando b é a menor das cotas superiores de X, isto é,

(1º) $x \leq b$ para todo $x \in X$;

(2º) se $c \in K$ é tal que $x \leq c$ para todo $x \in X$, então $b \leq c$.

A segunda condição é equivalente à:

$$\text{se } c < b, \text{ então existe } x \in X \text{ tal que } c < x$$

ou

$$\text{para todo } \epsilon \in K, \ \epsilon > 0, \ \text{existe } x \in X \ \text{tal que } b - \epsilon < x.$$

Denotamos $\sup X = b$ para indicar que b é o supremo de X. Dizemos que $a \in K$ é o **ínfimo** de X quando a é a maior das cotas inferiores de X, isto é,

(1º) $a \leq x$ para todo $x \in X$;

(2º) se $c \in K$ é tal que $c \leq x$ para todo $x \in X$, então $c \leq a$.

A segunda condição é equivalente à:

$$\text{se } a < c, \ \text{então existe } x \in X \ \text{tal que } x < c$$

ou

$$\text{para todo } \epsilon \in K, \ \epsilon > 0, \ \text{existe } x \in X \ \text{tal que } x < a + \epsilon.$$

Denotamos $\inf X = a$ para indicar que a é o ínfimo de X.

Exemplo 2.3.4. *Em* $\mathbb{Q}$, $\inf \mathbb{N} = 1$. *Note que* $\inf \mathbb{N} \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2.3.5. *Considerando* $X = \{x \in \mathbb{Q}\,;\, x < 1\} \subset \mathbb{Q}$, *temos que* $\sup X = 1$. *Observe que* $\sup X \notin X$.

Exemplo 2.3.6. *Sabendo que o corpo ordenado* $\mathbb{Q}$ *é arquimediano, vemos que* $Y = \{\frac{1}{n}\,;\, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Q}$ *é tal que* $\inf Y = 0$ *e* $\sup Y = 1$. *Neste caso,* $\sup Y \in Y$ *e* $\inf Y \notin Y$.

Exemplo 2.3.7. *O conjunto* $Z = \{x \in \mathbb{Q}\,;\, x \geq 0,\, x^2 < 2\} \subset \mathbb{Q}$ *é limitado superiormente mas não tem supremo em* $\mathbb{Q}$. *De fato,* $\sup Z = b$ *onde* $b^2 = 2$ *mas sabemos que não existe* $b \in \mathbb{Q}$ *nessas condições.*

Seja K um corpo ordenado. Dizemos que K é **completo** quando para todo subconjunto não vazio X de K limitado superiormente em K, tem-se $\sup X \in K$. Observe que considerando $Y = \{-x\,;\, x \in X\}$ temos que X é limitado superiormente em K se, e somente se, Y é limitado inferiormente em K. Neste caso, $\sup X = -\inf Y$, quando existem. Portanto, vale a seguinte

Proposição 2.3.3. *Um corpo ordenado* K *é completo se, e somente se, para todo subconjunto não vazio* X *de* K *limitado inferiormente em* K, *tem-se* $\inf X \in X$.

O exemplo 2.3.7 nos mostra que o corpo ordenado arquimediano $\mathbb{Q}$ não é completo.

Axioma: Existe um corpo ordenado completo denotado por $\mathbb{R}$, chamado o conjunto dos números reais e que contém $\mathbb{Q}$.

É claro que $\mathbb{R}$ tem infinitos elementos já que contém o conjunto dos números naturais.

Seja X um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$. Dizemos que X é **denso** em $\mathbb{R}$ quando para todos $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, temos $[a, b] \cap X \neq \emptyset$.

Proposição 2.3.4. *$\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ são densos em $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$.

Vejamos que $[a, b] \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$.

Como $\mathbb{R}$ é arquimediano, existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{p_0} < b - a$. Do fato de $\mathbb{Z}$ não ser limitado superiormente, existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $b \leq \frac{m}{p_0}$. Assim,

$$A = \{n \in \mathbb{Z}\,;\, b \leq \frac{n}{p_0}\}$$

é um subconjunto não vazio de $\mathbb{Z}$ limitado inferiormente em $\mathbb{R}$ e, portanto, A tem um menor elemento o qual denotaremos por n_0. Então $\frac{n_0-1}{p_0} < b \leq \frac{n_0}{p_0}$. Se $a \leq \frac{n_0-1}{p_0} < b$ temos $\frac{n_0-1}{p_0} \in [a, b] \cap \mathbb{Q}$ e daí $[a, b] \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$. Agora, se $\frac{n_0-1}{p_0} < a$, como $b \leq \frac{n_0}{p_0}$ temos $b - a < \frac{n_0}{p_0} - \frac{(n_0-1)}{p_0} = \frac{1}{p_0}$, o que é um absurdo devido a escolha de p_0. Portanto, $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$.

Vejamos que $[a, b] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \emptyset$.

Temos que $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e $\sqrt{2} > 0$, de modo que $\frac{a}{\sqrt{2}} < \frac{b}{\sqrt{2}}$. Mas $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$ e daí existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $\frac{a}{\sqrt{2}} < r < \frac{b}{\sqrt{2}}$, ou seja, $a < r\sqrt{2} < b$. Portanto $[a, b] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq 0$ pois $r\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. □

Terminaremos esta sessão provando que $\mathbb{R}$ é não enumerável. Para isto precisamos do seguinte

Lema 2.3.1. *Sejam $I_n = [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ tais que $I_{n+1} \subset I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = [a, b]$ onde*

$$a = \sup\{a_n\,;\, n \in \mathbb{N}\} \quad e \quad b = \inf\{b_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}.$$

Em particular, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$.

Demonstração. Por hipótese, $I_{n+1} \subset I_n$ donde segue

$$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq b_n \leq \ldots \leq b_2 \leq b_1$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto nos mostra que o conjunto $A = \{a_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$ é limitado superiormente em $\mathbb{R}$ e como $\mathbb{R}$ é completo temos que $a = \sup\ A \in \mathbb{R}$. Analogamente, o conjunto $B = \{b_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$ é limitado inferiormente em $\mathbb{R}$ e daí $b = \inf\ B \in \mathbb{R}$. Vejamos que $a \leq b$.

Fixe $m \in \mathbb{N}$. Se $n \in \mathbb{N}$ é tal que $m \geq n$, então $a_m \leq b_m \leq b_n$. Por outro lado, se $m \leq n$, então $a_m \leq a_n \leq b_n$. Em qualquer um dos casos temos $a_m \leq b_n$. Isto significa que todo a_m é uma cota inferior de B e daí $a_m \leq b$. Além disso, segue daí que b é uma cota superior de A e, portanto, $a \leq b$.

Por fim, vejamos que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = [a, b]$.

Como $a_n \leq a \leq b \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $[a, b] \subset \cap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Por outro lado, se $x \in \cap_{n\in\mathbb{N}} I_n$, então $a_n \leq x \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Ou seja, x é uma cota superior de A e uma cota inferior de B e assim $a \leq x \leq b$. Logo $\cap_{n\in\mathbb{N}} I_n \subset [a, b]$. Portanto $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = [a, b]$. □

Teorema 2.3.1. *O corpo ordenado completo $\mathbb{R}$ não é enumerável.*

Demonstração. Suponhamos que $\mathbb{R}$ seja enumerável. Então $\mathbb{R} = \{x_1, x_2 \ldots\}$ onde os $x_n \in \mathbb{R}$ são dois a dois distintos. Construimos intervalos encaixantes da seguinte maneira:

$$I_1 = [a_1, b_1] \text{ tal que } x_1 \notin I_1,$$

$$I_2 = [a_2, b_2] \text{ tal que } I_2 \subset I_1 \text{ e } x_2 \notin I_2,$$

$$I_3 = [a_3, b_3] \text{ tal que } I_3 \subset I_2 \text{ e } x_3 \notin I_3,$$

continuando com este processo temos $I_n = [a_n, b_n]$, $I_{n+1} \subset I_n$ e $x_n \notin I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelo lema anterior, $\cap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$, isto é, existe $x \in I_n$ tal que $x \neq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $x \notin \{x_n\,;\, n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{R}$, absurdo! Assim, $\mathbb{R}$ não é enumerável. $\square$

Segue direto do teorema anterior que o conjunto $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ não é enumerável.

Corolário 2.3.1. *O intervalo $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ não é enumerável.*

Demonstração. Se $[0, 1]$ fosse enumerável, para todo $n \in \mathbb{Z}$, o intervalo $[n, n + 1]$ seria enumerável já que a função $f_n : [0, 1] \longrightarrow [n, n + 1]$ definida por $f_n(x) = x + n$ para todo $x \in [0, 1]$ é bijetiva. Mas $\mathbb{R} = \cup_{n\in\mathbb{Z}}[n, n + 1]$ e como a união de enumeráveis é enumerável teríamos que $\mathbb{R}$ é enumerável, o que é um absurdo. Portanto, $[0, 1]$ não é enumerável. $\square$

Corolário 2.3.2. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$. Então $[a, b] \subset \mathbb{R}$ não é enumerável.*

Demonstração. Segue do fato que a função $f : [0, 1] \longrightarrow [a, b]$ onde $f(x) = (1-x)a+xb$ para todo $x \in [0, 1]$ é bijetiva e que $[0, 1]$ não é enumerável. $\square$

3

Sequências de Números Reais

3.1 Limites de Sequências

Uma **sequência** de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$. A sequência é denotada por $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (x_n) onde $x_n = x(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ é chamado o n-ésimo termo da sequência. O conjunto $\{x_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$ é chamado o conjunto dos valores da sequência (x_n).

A partir de agora, o termo sequência já está subentendido que é uma sequência de números reais.

Dizemos que uma sequência (x_n) é

(i) **limitada superiormente** quando existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$;

(ii) **limitada inferiormente** quando existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$;

(iii) **limitada** quando existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $|x_n| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$;

(iv) **crescente** quando $x_n \leq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$;

(v) **estritamente crescente** quando $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$;

(vi) **decrescente** quando $x_{n+1} \leq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$;

(vii) **estritamente decrescente** quando $x_{n+1} < x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$;

(viii) **monótona** quando é crescente ou decrescente.

Exemplo 3.1.1. *A sequência constante $x_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ é limitada.*

Exemplo 3.1.2. $(\frac{1}{n})$ *é uma sequência estritamente decrescente e limitada.*

Exemplo 3.1.3. *Seja $a > 1$ e considere a sequência $x_n = a^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então (a^n) é uma sequência estritamente crescente e limitada inferiormente mas não é limitada superiormente.*

Sejam (x_n) uma sequência e $L \in \mathbb{R}$. Dizemos que (x_n) **converge** para L quando n tende para $+\infty$, e denotamos $\lim x_n = L$, se dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ temos $|x_n - L| < \epsilon$. Simbolicamente,

$$\lim x_n = L \Longleftrightarrow (\forall \epsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N};\, n \geq n_0 \;\Rightarrow\; |x_n - L| < \epsilon).$$

Costuma-se denotar também $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n = L$; $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = L$; $x_n \to L$. Uma sequência (x_n) que converge para $L \in \mathbb{R}$ diz-se convergente e, neste caso, dizemos que L é o limite da sequência (x_n). Caso contrário, diz-se divergente.

Proposição 3.1.1. *(Unicidade do Limite) O limite de uma sequência convergente é único.*

Demonstração. Sejam (x_n) uma sequência e $L, M \in \mathbb{R}$ tais que $\lim x_n = L$ e $\lim x_n = M$. Dado $\epsilon > 0$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que se $n \geq n_1$, então $|x_n - L| < \epsilon$; e se $n \geq n_2$, então $|x_n - M| < \epsilon$. Tome $n_0 = \text{máx}\{n_1, n_2\}$. Se $n \geq n_0$, então $|x_n - L| < \epsilon$ e $|x_n - M| < \epsilon$. Daí

$$|L - M| \leq |x_n - L| + |x_n - M| < 2\epsilon.$$

Assim, para todo $\epsilon > 0$, temos $|L - M| < 2\epsilon$. Se $L \neq M$, para $\epsilon = \frac{|L-M|}{2}$ temos $|L - M| < 2\frac{|L-M|}{2}$, ou seja, $1 < 1$, o que é um absurdo! Portanto, $L = M$. □

Proposição 3.1.2. *Seja (x_n) uma sequência convergente. Temos que (x_n) converge para L se, e somente se, todo intervalo aberto de centro L e raio maior que zero contém todos os termos da sequência (x_n) exceto talvez um número finito de termos.*

Demonstração. Exercício. □

Proposição 3.1.3. *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração. Suponhamos que $\lim x_n = L \in \mathbb{R}$. Em particular, apra $\epsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$ temos $|x_n - L| < 1$. Então $|x_n| < 1 + |L|$ para todo $n \geq n_0$. Por outro lado, tomando $b = \text{máx}\{|x_1|, \ldots, |x_{n_0-1}|\}$ temos $|x_i| < c$ para todo $i = 1, \ldots, n_0 - 1$. Assim, para $c = \text{máx}\{1 + |L|, b\}$ segue que $|x_n| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto (x_n) é limitada. □

Note que a recíproca da proposição anterior não é verdadeira. Por exemplo, a sequência $x_n = (-1)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ é limitada mas é divergente.

Proposição 3.1.4. *Seja (x_n) uma sequência monótona. Então (x_n) é convergente se, e somente se, (x_n) é limitada. Mais precisamente,* *(a) se (x_n) é crescente e limitada superiormente, então*

$$\lim x_n = \sup\{x_n \,;\, n \in \mathbb{N}\};$$

(b) se (x_n) é decrescente e limitada inferiormente, então

$$\lim x_n = \inf\{x_n \,;\, n \in \mathbb{N}\}.$$

Demonstração. A ida segue da proposição anterior. Agora, suponhamos que (x_n) é crescente e limitada superiormente. Seja $L = \sup\{x_n \,;\, n \in \mathbb{N}\}$. Vejamos que $\lim x_n = L$. Fixemos $\epsilon > 0$. Como $L = \sup\{x_n \,;\, n \in \mathbb{N}\}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $L - \epsilon < x_{n_0} \leq L$. Por hipótese, (x_n) é crescente e daí $x_{n_0} \leq x_n$ para todo $n \geq n_0$. Assim $L - \epsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq L < L + \epsilon$ para todo $n \geq n_0$. Ou seja, $|x_n - L| < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$. Daí $\lim x_n = L$. Analogamente, prova-se o caso decrescente. □

Exemplo 3.1.4. *A sequência $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ é estritamente decrescente e limitada (inferiormente) e, portanto,*

$$\lim \frac{1}{n} = \inf\left\{\frac{1}{n} \,;\, n \in \mathbb{N}\right\} = 0.$$

Exemplo 3.1.5. *Seja $a \in (0,1)$ e considere a sequência $x_n = a^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Vemos que (a^n) é uma sequência estritamente decrescente e limitada inferiormente de modo que*

$$\lim a^n = \inf\{a^n \,;\, n \in \mathbb{N}\} = 0.$$

Com efeito, dado $\epsilon > 0$, como $\mathbb{R}$ é arquimediano, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(\frac{1}{a})^{n_0} > \frac{1}{\epsilon}$. Ou seja, $a^{n_0} < \epsilon$. Portanto, dado $\epsilon > 0$, se $n \geq n_0$ temos $0 < a^n < \epsilon$, isto é, $|a^n| < \epsilon$.

Exemplo 3.1.6. *Dado $a > 1$, a sequência $x_n = a^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ é monótona crescente e não é limitada superiormente e, portanto, é divergente.*

Exemplo 3.1.7. *A sequência $x_n = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ não é limitada e assim é divergente.*

Proposição 3.1.5. *Seja (x_n) uma sequência tal que $\lim x_n = L \in \mathbb{R}$. Se $M \in \mathbb{R}$ é tal que $M < L$, então para todo n suficientemente grande tem-se $M < x_n$, isto é, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $M < x_n$ para todo $n \geq n_0$. Analogamente, se $L < M$, então $x_n < M$ para todo n suficientemente grande.*

Demonstração. Dado $\epsilon = L - M > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - L| < L - M$ para todo $n \geq n_0$. Então

$$|x_n - L| < L - M \;\Rightarrow\; L - (L - M) < x_n \;\Rightarrow\; M < x_n.$$

para todo $n \geq n_0$. Assim, $M < x_n$ para todo $n \geq n_0$.

A outra afirmação se prova analogamente. □

Em particular, tomando $M = 0$ na proposição anterior, temos que se $\lim x_n = L > 0$, então $x_n > 0$ para todo n suficientemente grande. Analogamente, se $\lim x_n < 0$, então $x_n < 0$ para todo n suficientemente grande.

Corolário 3.1.1. *Sejam (x_n) e (y_n) sequências e $L, M \in \mathbb{R}$ tais que $\lim x_n = L$ e $\lim y_n = M$. Se $x_n \leq y_n$ para todo n suficientemente grande, então $L \leq M$. Em particular, se $x_n \leq M$ para todo n suficientemente grande, então $L \leq M$.*

Demonstração. Com efeito, se $M < L$, então existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $M < c < L$. Pela proposição anterior, teríamos $y_n < c < x_n$ para todo n suficientemente grande, o que contradiz a hipótese. □

No teorema anterior, se $x_n < y_n$, então não pode-se concluir que $L < M$. Basta tomar como exemplo $x_n = 0$ e $y_n = \frac{1}{n}$.

Proposição 3.1.6. *(Teorema do Sanduíche) Sejam (x_n), (y_n) e (z_n) sequências tais que $x_n \leq y_n \leq z_n$ para todo n suficientemente grande. Se $\lim x_n = \lim z_n = L \in \mathbb{R}$, então $\lim y_n = L$.*

Demonstração. Por hipótese, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \leq y_n \leq z_n$ para todo $n \geq n_1$. Dado $\epsilon > 0$, existem $n_2, n_3 \in \mathbb{N}$ tais que

$$L - \epsilon < x_n < L + \epsilon \text{ para todo } n \geq n_2$$

e

$$L - \epsilon < z_n < L + \epsilon \text{ para todo } n \geq n_3.$$

Seja $n_0 = \text{máx}\{n_1, n_2, n_3\}$. Para $n \geq n_0$ temos

$$L - \epsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < L + \epsilon$$

isto é, $|y_n - L| < \epsilon$. Poranto, $\lim y_n = L$. □

Proposição 3.1.7. *Seja (x_n) uma sequência tal que $\lim x_n = 0$. Se (y_n) é uma sequência limitada, então $\lim x_n y_n = 0$.*

Demonstração. Existe $M > 0$ tal que $|y_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n| < \frac{\epsilon}{M}$ para todo $n \geq n_0$. Assim

$$|x_n y_n| = |x_n||y_n| \leq \frac{\epsilon}{M} M = \epsilon$$

para todo $n \geq n_0$. Logo $\lim x_n y_n = 0$. □

Proposição 3.1.8. *Sejam (x_n) e (y_n) sequências tais que $\lim x_n = L \in \mathbb{R}$ e $\lim y_n = M \in \mathbb{R}$. Então*

(a) $\lim(x_n + y_n) = L + M$;

(b) $\lim x_n y_n = LM$;

(c) $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{L}{M}$ *desde que* $M \neq 0$.

Demonstração. Exercício. □

Exemplo 3.1.8. *Fixado* $p > 0$, *a sequência* $\left(\dfrac{1}{n^p}\right)$ *é convergente pois é decrescente e limitada. Mas dado* $\epsilon > 0$, *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $n_0 > \left(\dfrac{1}{\epsilon}\right)^{1/p}$ *(por quê?). Assim, para todo* $n \geq n_0$, *temos que* $0 < \dfrac{1}{n^p} < \epsilon$, *ou seja,*

$$\lim \frac{1}{n^p} = 0.$$

Exemplo 3.1.9. *Seja* $a > 0$. *Mostraremos que* $\lim \sqrt[n]{a} = 1$.

Separemos em casos: Se $a > 1$, *seja* $x_n = \sqrt[n]{a} - 1 > 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Pela Desigualdade de Bernoulli, temos*

$$a = (1 + x_n)^n \geq 1 + nx_n \;\Rightarrow\; 0 < 1 + nx_n < a \;\Rightarrow\; 0 < x_n < \frac{a-1}{n}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. *Pelo Teorema do Sanduíche, segue que* $\lim x_n = 0$ *e daí* $\lim \sqrt[n]{a} = 1$.

Se $0 < a < 1$, *defina* $x_n = 1 - \sqrt[n]{a}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Fazendo de modo análogo ao caso* $a > 1$, *mostra-se que* $\lim \sqrt[n]{a} = 1$.

O caso $a = 1$ *é óbvio!*

Portanto, em qualquer um dos casos temos

$$\lim \sqrt[n]{a} = 1.$$

Exemplo 3.1.10. *Vejamos que* $\lim \sqrt[n]{n} = 1$.

Seja $x_n = \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Pelo Binômio de Newton, temos*

$$n = (1 + x_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_n^k \geq \frac{n(n-1)}{2} x_n^2$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. *Daí*

$$\frac{n(n-1)}{2} x_n^2 \leq n \;\Rightarrow\; 0 \leq x_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

para todo $n \geq 2$. *Pelo Teorema do Sanduíche seque que* $\lim x_n = 0$ *e, portanto,*

$$\lim \sqrt[n]{n} = 1.$$

Proposição 3.1.9. *Seja* (x_n) *uma sequência tal que* $x_n > 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Se* $\lim \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = a < 1$, *então* $\lim x_n = 0$.

Demonstração. Exercício. $\square$

Exemplo 3.1.11. *Seja* $a > 1$ *e* $k \in \mathbb{N}$. *Temos que* $\lim \dfrac{n^k}{a^n} = 0$.

De fato, seja $x_n = \dfrac{n^k}{a^n}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Então* $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^k \dfrac{1}{a}$ *e daí*

$$\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \frac{1}{a} = \frac{1}{a} < 1.$$

Pela proposição anterior segue que $\lim x_n = 0$ *e daí*

$$\lim \frac{n^k}{a^n} = 0.$$

Exemplo 3.1.12. *Se* $a > 1$, *então* $\lim \dfrac{a^n}{n!} = 0$.

Com efeito, defina $x_n = \dfrac{a^n}{n!}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Então* $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{a}{n+1}$ *e assim*

$$\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim \frac{a}{n+1} = 0 < 1$$

donde pela proposição anterior segue que $\lim x_n = 0$, *ou seja,*

$$\lim \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Exemplo 3.1.13. *Para* $a \in (0, 1)$, *defina a sequência*

$$x_n = 1 + a + a^2 + \ldots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. *É claro que* (x_n) *é crescente. Além disso, para todo* $n \in \mathbb{N}$, *temos*

$$|x_n| = \frac{|1 - a^{n+1}|}{1 - a} \leq \frac{1}{1 - a}$$

e, portanto, (x_n) *é convergente. Mas*

$$\lim \left(\frac{1}{1 - a} - x_n\right) = \lim \frac{a^{n+1}}{1 - a} = 0$$

e daí

$$\lim(1 + a + a^2 + \ldots + a^n) = \frac{1}{1 - a}.$$

Na verdade, se $|a| < 1$, *então* $\lim(1 + a + a^2 \ldots + a^n) = \dfrac{1}{1 - a}$. *Denotando de outra forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \lim \sum_{n=0}^{m} a^n = \frac{1}{1 - a}.$$

Exemplo 3.1.14. *Vamos estudar a sequência*

$$x_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. *Claramente esta sequência é crescente. Vejamos que é limitada. De fato, para todo* $n \in \mathbb{N}$, *temos que* $n! \geq 2^{n-1}$ *e então*

$$2 \leq x_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} \leq 1 + \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} \leq 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3.$$

Portanto, (x_n) *é convergente e seu limite é dado por*

$$\lim \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) = e \in \mathbb{R}.$$

Observe que $2 < e \leq 3$. *Na verdade,* $e = 2,7182\ldots$. *Denotando de outra forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \lim \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n!} = e.$$

Exemplo 3.1.15. *Seja a sequência*

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. *Vejamos que* $\lim y_n = e$. *Note que*

$$\begin{aligned} x_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \\ &= 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{n!}\frac{1}{n^n} = \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) < \\ &< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}. \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. *Daí* $0 < y_n < 3$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Claramente* (x_n) *é crescente e, portanto,* $\lim x_n = L \in \mathbb{R}$. *Como* $\lim \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) = e$, *segue que* $L \leq e$. *Por outro lado, para* $n > p$ *temos*

$$x_n \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{p!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{p-1}{n}\right)$$

de modo que

$$L = \lim x_n \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{p!}.$$

Como isto vale para todo $p \in \mathbb{N}$, *segue que* $e \leq L$. *Concluimos que* $L = e$, *isto é,*

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Exemplo 3.1.16. *Vejamos que* $\lim \dfrac{n!}{n^n} = 0$.

Com efeito, seja $x_n = \dfrac{n!}{n^n}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Assim*

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

e daí

$$\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1.$$

Portanto,

$$\lim \frac{n!}{n^n} = 0.$$

3.2 Subsequência de uma Sequência

Dada uma sequência $x = (x_n)$, uma **subsequência** de x é a restrição da função x a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots\}$. Denotamos $x' = (x_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ ou (x_{n_k}) para indicar a subsequência de (x_n).

Por exemplo, se $x = (x_n)$ é uma sequência, então (x_{2n}) e (x_{2n-1}) são subsequências x.

Lembre-se que $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ é infinito se, e somente se, não é limitado em $\mathbb{N}$, isto é, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $n_k \in \mathbb{N}'$ com $n_k > n$.

Proposição 3.2.1. *Toda subsequência de uma sequência convergente é convergente. Mais precisamente, se* (x_n) *é uma sequência tal que* $\lim x_n = L$ *e* (x_{n_k}) *é uma subsequência de* (x_n), *então* $\lim x_{n_k} = L$.

Demonstração. Seja (x_{n_k}) uma subsequência de (x_n) e suponhamos que $\lim x_n = L$. Fixemos $\epsilon > 0$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - L| < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$. Como $\{n_k \,;\, k \in \mathbb{N}\}$ não é limitado em $\mathbb{N}$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_{k_0} \geq n_0$. Mas $n_{k+1} > n_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e daí $n_k \geq n_0$ para todo $k \geq k_0$. Portanto $|x_{n_k} - L| < \epsilon$ para todo $k \geq k_0$. Assim, $\lim x_{n_k} = L$. □

Seja (x_n) uma sequência. Dizemos que $a \in \mathbb{R}$ é um **valor de aderência** de (x_n) quando existe uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n) tal que $\lim x_{n_k} = a$.

Exemplo 3.2.1. *Se* (x_n) *é uma sequência convergente a* $L \in \mathbb{R}$, *então* L *é o único valor de aderência de* (x_n).

Exemplo 3.2.2. *A sequência* $x_n = (-1)^n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *tem como únicos valores de aderência* 1 *e* -1.

Proposição 3.2.2. *Sejam* $a \in \mathbb{R}$ *e* (x_n) *uma sequência. Então* a *é um valor de aderência de* (x_n) *se, e somente se, todo intervalo aberto centrado em* a *de raio* $\epsilon > 0$ *contém um número infinito de termos de* (x_n).

Demonstração. Exercício. □

3.3 Limite Superior e Limite Inferior

Seja (x_n) uma sequência limitada. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos os conjuntos

$$X_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\} = \{x_k \, ; \, k \geq n\}.$$

Como cada X_n é limitado, sejam

$$a_n = \inf \, X_n = \inf_{k \geq n} x_k \quad \text{ e } \quad b_n = \sup \, X_n = \sup_{k \geq n} x_k \tag{3.1}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Mais ainda, as sequências (a_n) e (b_n) são limitadas. Além disso, é claro que $X_{n+1} \subset X_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e daí (a_n) é uma sequência crescente e (b_n) é uma sequência decrescente. Portanto, (a_n) e (b_n) são sequências convergentes. Sejam $a = \lim a_n$ e $b = \lim b_n$. Observe que

$$a = \lim \, a_n = \sup \, a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} x_k \tag{3.2}$$

e

$$b = \lim \, b_n = \inf \, b_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} x_k. \tag{3.3}$$

Dizemos que a é o **limite inferior** de (x_n) e denotamos $\liminf \, x_n = a$, e que b é o **limite superior** de (x_n) e denotamos $\limsup \, x_n = b$.

Pela definição, é claro que $\liminf \, x_n \leq \limsup \, x_n$. Por exemplo, se $x_n = (-1)^n$ temos que $X_n = \{-1, 1\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e daí $\liminf \, x_n = -1$ e $\limsup \, x_n = 1$.

Proposição 3.3.1. *Seja (x_n) uma sequência limitada. Então* $\liminf \, x_n$ *é o menor valor de aderência de (x_n) e* $\limsup \, x_n$ *é o maior valor de aderência de (x_n).*

Demonstração. Mostraremos que $\liminf \, x_n$ é um valor de aderência de (x_n), ou seja, que existe uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n) tal que $\lim x_{n_k} = \liminf \, x_n$. Sejam $a = \liminf \, x_n = \lim \, a_n$, onde os a_n estão definidos como em (3.1). Temos

$$a_1 = \inf \, X_1 \Rightarrow \text{ existe } \; n_1 \in \mathbb{N} \; ; \, a_1 \leq x_{n_1} < a_1 + 1;$$

$$a_{n_1+1} = \inf \, X_{n_1+1} \Rightarrow \text{ existe } \; n_2 > n_1 \in \mathbb{N} \; ; \, a_{n_1+1} \leq x_{n_2} < a_{n_1+1} + \frac{1}{2};$$

$$a_{n_2+1} = \inf \, X_{n_2+1} \Rightarrow \text{ existe } \; n_3 > n_2 \in \mathbb{N} \; ; \, a_{n_2+1} \leq x_{n_3} < a_{n_2+1} + \frac{1}{3};$$

continuando com este processo, construímos uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n) tal que

$$a_{n_k+1} \leq x_{n_k+1} < a_{n_k+1} + \frac{1}{k}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $\lim a_{n_k+1} = a$, pelo Teorema do Sanduíche segue que $\lim x_{n_k} = a$ e, portanto, a é um valor de aderência.

Analogamente, mostra-se que $b = \limsup x_n = \lim b_n$ onde os b_n estão definidos como em (3.1) é um valor de aderência de (x_n).

Agora, seja c um valor de aderência de (x_n). Logo existe uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n) tal que $\lim x_{n_k} = c$. Mas $a_{n_k} \leq x_{n_k} \leq b_{n_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e, portanto, $a \leq c \leq b$. Ou seja, a e b são, respectivamente, o menor e o maior valor de aderência de (x_n) □

Corolário 3.3.1. *Toda sequência limitada* (x_n) *é convergente se, e somente se,* $\liminf x_n = \limsup x_n$.

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência limitada. Se (x_n) é convergente, então (x_n) tem somente um único valor de aderência e daí $\liminf x_n = \limsup x_n$. Reciprocamente, suponhamos que $\liminf x_n = \limsup x_n$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq x_n \leq b_n$ onde os a_n e os b_n estão definidos como em (3.1). Por hipótese $\lim a_n = \liminf x_n = \limsup x_n = \lim b_n$ e daí (x_n) é convergente. □

Teorema 3.3.1. *(Teorema de Bolzano-Weierstrass) Toda sequência limitada possui uma subsequência convergente.*

Demonstração. Se (x_n) é uma sequência limitada, como vimos $\limsup x_n$ existe e é o maior valor de aderência de (x_n) e daí existe uma subsequência de (x_n) que converge para $\limsup x_n$. □

3.4 Sequências de Cauchy

Dizemos que uma sequência (x_n) é de **Cauchy** quando para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_m| < \epsilon$ para todos $n, m \geq n_0$.

Proposição 3.4.1. *Toda sequência convergente é de Cauchy.*

Demonstração. Se $\lim x_n = L \in \mathbb{R}$, então dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - L| < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $n \geq n_0$. Então tomando $n, m \geq n_0$, temos

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - L| + |x_m - L| < \epsilon.$$

Portanto, (x_n) é de Cauchy. □

Proposição 3.4.2. *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

Demonstração. Se (x_n) é de Cauchy, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_m| < 1$ para todos $n, m \geq n_0$. Em particular, temos $|x_n| \leq |x_{n_0}| + 1$ para todo $n \geq n_0$. Tomando $c = \text{máx}\{|x_1|, \ldots, |x_{n_0-1}|, |x_{n_0}| + 1\}$ segue que $|x_n| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, (x_n) é limitada. □

Proposição 3.4.3. *Toda sequência de Cauchy que possui uma subsequência convergente é convergente.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy e suponhamos que exista uma subsequência (x_{n_k}) tal que $\lim x_{n_k} = L \in \mathbb{R}$. Vejamos que $\lim x_n = L$. Fixemos $\epsilon > 0$. Existem $n_0, k_0 \in \mathbb{N}$ tais que $|x_n - x_m| < \frac{\epsilon}{2}$ para todos $n, m \geq n_0$ e $|x_{n_k} - L| < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $k \geq k_0$. Tomemos $N = \text{máx}\{n_0, k_0\}$. Observe que $k \geq n_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. De fato, para $k = 1$, é claro que $1 \leq n_1$. Suponhamos verdade para alguma k, isto é, $k \leq n_k$. Vejamos que vale para $k+1$. Como $k \leq n_k < n_{k+1}$ e $n_{k+1}, n_k \in \mathbb{N}$, então $k+1 \leq n_{k+1}$. Assim se $k \geq N$, então $n_k \geq N$ e daí $|x_k - x_{n_k}| < \frac{\epsilon}{2}$. Então

$$|x_k - L| \leq |x_k - x_{n_k}| + |x_{n_k} - L| < \epsilon.$$

Então $\lim x_n = L$. □

Corolário 3.4.1. *Uma sequência é convergente se, e somente se, é de Cauchy.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy. Logo (x_n) é limitada e pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass possui uma subsequência convergente. Pela proposição anterior segue que (x_n) é convergente. A recíproca é a Proposição 3.4.1. □

3.5 Limites Infinitos

Seja (x_n) uma sequência. Dizemos que $\lim x_n = +\infty$ quando dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > \epsilon$ para todo $n \geq n_0$. Analogamente, dizemos que $\lim x_n = -\infty$ quando dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n < -\epsilon$ para todo $n \geq n_0$.

Proposição 3.5.1. *Sejam (x_n) e (y_n) sequências de números reais.*

(a) *Se* $\lim x_n = \lim y_n = +\infty$, *então* $\lim(x_n + y_n) = +\infty$;

(b) *Se* $\lim x_n = +\infty$ *e* $y_n > c > 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *então* $\lim x_n y_n = +\infty$;

(c) *Se* $\lim x_n = +\infty$, *então* $\lim a x_n = +\infty$ *para todo* $a > 0$;

(d) *Se* $\lim x_n = +\infty$, *então* $\lim a x_n = -\infty$ *para todo* $a < 0$;

(e) *Se* $x_n > c > 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, $y_n > 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *mas* $\lim y_n = 0$, *então* $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = +\infty$;

(f) *Se* (x_n) *é limitada e* $\lim y_n = +\infty$, *então* $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = 0$.

Demonstração. Exercício. □

Vale o mesmo resultado com $\lim x_n = \lim y_n = -\infty$, com as devidas modificações.

Observe que se $\lim x_n = \lim y_n = +\infty$, nada podemos afirmar sobre $\lim(x_n - y_n)$ e $\lim \dfrac{x_n}{y_n}$ (exemplos?).

3.6 Séries de Números Reais

Seja (x_n) uma sequência. Definimos uma nova sequência (s_n) onde

$$\begin{aligned}
&s_1 = x_1\\
&s_2 = s_1 + x_2 = x_1 + x_2\\
&s_3 = s_2 + x_3 = x_1 + x_2 + x_3\\
&\vdots\\
&s_n = s_{n-1} + x_n = x_1 + \ldots + x_n
\end{aligned}$$

para todo $n \geq 2$. A expressão $\sum x_n$ é dita uma **série numérica** e os números s_n são chamados as **somas parciais** de $\sum x_n$. A parcela x_n é o $n-$**ésimo termo** ou **termo geral** da série.

Exemplo 3.6.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$

Exemplo 3.6.2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$

Exemplo 3.6.3. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 = 1 + 4 + 9 + \ldots + n^2 + \ldots$

Seja $\sum x_n$ uma série. Dizemos que a série é **convergente** quando a sequência das suas somas parciais (s_n) é convergente. Isto é, existe $L \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| \sum_{k=1}^{n} x_k - L \right| < \epsilon$$

para todo $n \geq n_0$. Neste caso, denotamos $\sum x_n = L$. Se (s_n) diverge, dizemos que a série $\sum x_n$ é **divergente**.

Exemplo 3.6.4. *Se $|a| < 1$, então $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$ (série geométrica).*

Exemplo 3.6.5. *Sabemos que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$ pois $\lim(1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}) = e$.*

Exemplo 3.6.6. *A série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ é divergente pois a sequência das suas somas parciais possui duas subsequências que convergem para pontos diferentes, a saber $\lim s_{2n} = 0$ e $\lim s_{2n+1} = 1$.*

Exemplo 3.6.7. *A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ é convergente. Com efeito, note que para todo $n \in \mathbb{N}$*

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

e daí $\lim s_n = 1$. Poranto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$. Séries com essa característica da sequência das somas parciais são ditas séries telescópicas.

Exemplo 3.6.8. *A série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *é divergente. De fato, fixado* $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, *temos*

$$\begin{aligned}
s_{2^n} &= \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) \\
&> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^n} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{2^{n-1}}{2^n} = 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2}}_{n-vezes} \\
&= 1 + \frac{n}{2}
\end{aligned}$$

ou seja, $s_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$. *Fazendo* $n \to +\infty$ *temos que* $\lim s_{2^n} = +\infty$. *Como* (s_{2^n}) *é uma subsequência de* (s_n) *segue que* (s_n) *é divergente. Portanto,* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *diverge. Esta série é conhecida como a série harmônica.*

4

Topologia da Reta

4.1 Conjuntos Abertos

Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$. Dizemos que $a \in \mathbb{R}$ é um **ponto interior** de A quando existe $\epsilon > 0$ tal que $(a - \epsilon, a + \epsilon) \subset A$. O **interior** de A é o conjunto dos pontos interiores de A e será denotado por $\operatorname{int} A$. É claro, através da definição, que $\operatorname{int} A \subset A$.

Exemplo 4.1.1. *É claro que* $int \emptyset = \emptyset$ *e* $int \mathbb{R} = \mathbb{R}$.

Exemplo 4.1.2. *Se* $a, b \in \mathbb{R}$ *com* $a < b$, *então* $int(a, b) = int[a, b) = int(a, b] = int[a, b] = (a, b)$.

Exemplo 4.1.3. *Todo subconjunto finito de* $\mathbb{R}$ *tem interior vazio.*

Exemplo 4.1.4. *Como todo intervalo não degenerado não é enumerável, temos que todo subconjunto infinito e enumerável de* $\mathbb{R}$ *tem interior vazio. Em particular,* $int \mathbb{Q} = \emptyset$.

Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$. Dizemos que A é um **conjunto aberto** de $\mathbb{R}$, ou simplesmente um aberto, quando $A = \operatorname{int} A$.

Temos que $\emptyset$, $\mathbb{R}$ e (a, b) são exemplos de conjuntos abertos de $\mathbb{R}$ enquanto que $[a, b)$ e $\mathbb{Q}$ não são conjuntos abertos de $\mathbb{R}$.

O limite de uma sequência de números reais pode ser reforumlado em termos de conjuntos abertos: uma sequência (x_n) converge para $a \in \mathbb{R}$, isto é, $\lim x_n = a$ se, e somente se, para todo aberto A contendo a, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in A$ para todo $n \geq n_0$.

Proposição 4.1.1. *(a) Se* $A_1, \ldots, A_n$ *são conjuntos abertos de* $\mathbb{R}$, *então* $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ *é um conjunto aberto de* $\mathbb{R}$.

(b) Se $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ *é uma família de conjuntos abertos de* $\mathbb{R}$, *então* $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ *é um conjunto aberto de* $\mathbb{R}$.

Demonstração. (a) Se $\bigcap_{i=1}^n A_i = \emptyset$, então $\bigcap_{i=1}^n A_i$ é um conjunto aberto. Suponhamos agora que $\bigcap_{i=1}^n A_i \neq \emptyset$. Vamos mostrar que $\bigcap_{i=1}^n A_i$ é aberto, isto é, $\bigcap_{i=1}^n A_i \subset \operatorname{int}(\bigcap_{i=1}^n A_i)$. Seja $a \in \bigcap_{i=1}^n A_i$. Então $a \in A_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Como cada A_i é aberto, existe $\epsilon_i > 0$ tal que $(a-\epsilon_i, a+\epsilon_i) \subset A_i$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Tomando $\epsilon = \text{mín}\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\} > 0$, temos que $(a-\epsilon, a+\epsilon) \subset A_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$ e daí $(a-\epsilon, a+\epsilon) \subset \bigcap_{i=1}^n A_i$. Assim, $\bigcap_{i=1}^n A_i$ é um conjunto aberto.

(b) Se $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda = \emptyset$, então $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ é um conjunto aberto. Suponhamos que $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \neq \emptyset$. Vamos mostrar que $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ é aberto, ou seja, $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \subset \operatorname{int} \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$. Seja $a \in \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$. Logo existe $\lambda_0 \in L$ tal que $a \in A_{\lambda_0}$. Mas A_{λ_0} é aberto e daí existe $\epsilon > 0$ tal que $(a-\epsilon, a+\epsilon) \subset A_{\lambda_0}$. Portanto, $(a-\epsilon, a+\epsilon) \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$, o que mostra que $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ é um conjunto aberto. □

Note que a interseção de um número infinito de abertos pode não ser um aberto. De fato, os conjuntos $A_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ para todo $n \in \mathbb{N}$ são abertos mas $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{0\}$ não é aberto.

Proposição 4.1.2. *Seja X um subconjunto de $\mathbb{R}$. Então $\operatorname{int} X$ é um conjunto aberto. Além disso, se A é um conjunto aberto contido em X, então $A \subset \operatorname{int} X$. Mais geralmente, $\operatorname{int} X$ é o "maior"conjunto aberto contido em X.*

Demonstração. A afirmação é evidente se $\operatorname{int} X = \emptyset$. Suponhamos então $\operatorname{int} X \neq \emptyset$. Vamos mostrar que $\operatorname{int} X$ é um aberto, isto é, que $\operatorname{int} X \subset \operatorname{int}(\operatorname{int} X)$.

Seja $a \in \operatorname{int} X$. Por definição, existe $\epsilon > 0$ tal que $(a-\epsilon, a+\epsilon) \subset X$. Vejamos que $(a-\epsilon, a+\epsilon) \subset \operatorname{int} X$. De fato, fixado $c \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$, existe $\delta > 0$ tal que $(c-\delta, c+\delta) \subset (a-\epsilon, a+\epsilon)$ pois $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ é aberto. Mas $(a-\epsilon, a+\epsilon) \subset X$ e daí $(c-\delta, c+\delta) \subset X$. Isto significa que $c \in \operatorname{int} X$. Portanto $(a-\epsilon, a+\epsilon) \subset \operatorname{int} X$ e isto mostra que $\operatorname{int} X \subset \operatorname{int}(\operatorname{int} X)$.

Agora, dado $A \subset X$ aberto, seja $a \in A$. Então existe $\epsilon > 0$ tal que $(a-\epsilon, a+\epsilon) \subset A \subset X$ e assim $a \in \operatorname{int} X$. Ou seja, $A \subset \operatorname{int} X$. □

4.2 Conjuntos Fechados

Seja F um subconjunto de $\mathbb{R}$. Dizemos que $a \in \mathbb{R}$ é um **ponto de aderência** de F quando existe uma sequência (x_n) em F (isto é, $x_n \in F$ para todo $n \in \mathbb{N}$) tal que $\lim x_n = a$. O **fecho** de F é o conjunto dos pontos de aderência de F e será denotado por $\overline{F}$. É claro, através da definição, que $F \subset \overline{F}$.

Exemplo 4.2.1. *É claro que $\overline{\emptyset} = \emptyset$ e $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$.*

Exemplo 4.2.2. *Se $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, então $\overline{(a,b)} = \overline{[a,b)} = \overline{(a,b]} = \overline{[a,b]} = [a,b]$.*

Exemplo 4.2.3. *Como* $\mathbb{Q}$ *e* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *são densos em* $\mathbb{R}$*, segue que* $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ *e* $\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$*.*

Proposição 4.2.1. *Seja* X *um subconjunto não vazio de* $\mathbb{R}$*. Então* $a \in \overline{X}$ *se, e somente se, para todo* $\epsilon > 0$ *tem-se* $(a-\epsilon, a+\epsilon) \cap X \neq \emptyset$*. Equivalentemente,* $a \in \overline{X}$ *se, e somente se, todo aberto que contém* a*, contém um ponto de* X*.*

Demonstração. Se $a \in \overline{X}$, então existe uma sequência (x_n) em X tal que $\lim x_n = a$. Dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ satisfazendo $|x_n - a| < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$, isto é, $x_n \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$ para todo $n \geq n_0$. Como (x_n) é uma sequência em X, temos que $(a-\epsilon, a+\epsilon) \cap X \neq \emptyset$.

Agora, suponhamos que para todo $\epsilon > 0$ tem-se $(a-\epsilon, a+\epsilon) \cap X \neq \emptyset$. Isto significa que, para todo $\epsilon > 0$, existe $x_\epsilon \in X$ tal que $|x_\epsilon - a| < \epsilon$. Em particular, para

$$\epsilon = 1, \text{ existe } x_1 \in X \text{ tal que } |x_1 - a| < 1;$$

$$\epsilon = \frac{1}{2}, \text{ existe } x_2 \in X \text{ tal que } |x_2 - a| < \frac{1}{2};$$

$$\vdots$$

$$\epsilon = \frac{1}{n}, \text{ existe } x_n \in X \text{ tal que } |x_n - a| < \frac{1}{n}$$

e isto vale para todo $n \in \mathbb{N}$. Continuando com este processo, construímos uma sequência (x_n) em X tal que $\lim x_n = a$. Portanto, $a \in \overline{X}$. □

Seja F um subconjunto de $\mathbb{R}$. Dizemos que F é um **conjunto fechado** de $\mathbb{R}$, ou simplesmente um fechado, quando $\overline{F} = F$.

Temos que $\emptyset$, $\mathbb{R}$ e $[a, b]$ são exemplos de conjuntos fechados de $\mathbb{R}$, enquanto que (a, b), $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ não são conjuntos fechados de $\mathbb{R}$.

A próxima proposição mostra uma relação entre os conjuntos abertos e fechados de $\mathbb{R}$.

Proposição 4.2.2. *Seja* X *um subconjunto de* $\mathbb{R}$*. Então* X *é fechado se, e somente se,* $\mathbb{R} \setminus X$ *é aberto.*

Demonstração. A afirmação é clara se $X = \emptyset$. Vejamos o caso em que $X \neq \emptyset$.

Seja X um fechado. Se $a \in \mathbb{R} \setminus X$, então $a \notin X = \overline{X}$. Daí existe $\epsilon > 0$ tal que $(a-\epsilon, a+\epsilon) \cap X = \emptyset$. Disto segue que $(a-\epsilon, a+\epsilon) \subset \mathbb{R} \setminus X$. Portanto, $a \in \operatorname{int}(\mathbb{R} \setminus X)$, ou seja, $\mathbb{R} \setminus X$ é um aberto.

Agora, suponhamos que $\mathbb{R} \setminus X$ é um aberto. Se $a \notin X$, então $a \in \mathbb{R} \setminus X$. Assim existe $\epsilon > 0$ tal que $(a-\epsilon, a+\epsilon) \subset \mathbb{R} \setminus X$, isto é, $(a-\epsilon, a+\epsilon) \cap X = \emptyset$. Portanto, $a \notin \overline{X}$. Isto mostra que $\overline{X} \subset X$, ou seja, X é um fechado. □

É importante mencionar que aberto não é contrário de fechado (e vice-versa), ou seja, dizer que um subconjunto de $\mathbb{R}$ não é fechado, não significa dizer que é aberto (e vice-versa)! Por exemplo, os intervalos abertos são abertos mas não são fechados; os intervalos fechados são fechados mas não são abertos; os intervalos semi-abertos não são fechados e nem abertos. Já sabemos que $\emptyset$ e $\mathbb{R}$ são exemplos de subconjuntos de $\mathbb{R}$ que são simultaneamente aberto e fechado. Será que existem outros? (Pesquisem!)

Proposição 4.2.3. *(a) Se $F_1, \ldots, F_n$ são conjuntos fechados de $\mathbb{R}$, então $\bigcup_{i=1}^n F_i$ é um conjunto fechado de $\mathbb{R}$.*

(b) Se $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma família de conjuntos fechados de $\mathbb{R}$, então $\bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$ é um conjunto fechado de $\mathbb{R}$.

Demonstração. Seguem das Proposições 4.1.1 e 4.2.2, em conjunto com as relações $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{i=1}^n F_i = \bigcap_{i=1}^n (\mathbb{R} \setminus F_i)$ e $\mathbb{R} \setminus \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda = \bigcup_{\lambda \in L} (\mathbb{R} \setminus F_\lambda)$. □

Note que a união de um número infinito de fechados pode não ser um fechado. Por exemplo, os conjuntos $F_n = \mathbb{R} \setminus (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ para todo $n \in \mathbb{N}$ são fechados mas $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ não é fechado.

Proposição 4.2.4. *Seja X um subconjunto de $\mathbb{R}$. Então $\overline{X}$ é um conjunto fechado. Além disso, se F é um conjunto fechado que contém X, então $\overline{X} \subset F$. Mais geralmente, $\overline{X}$ é o "menor"conjunto fechado que contém X.*

Demonstração. Vamos mostrar que $\overline{X}$ é um fechado, isto é, que $\mathbb{R} \setminus \overline{X}$ é um aberto. A afirmação é clara se $X = \emptyset$. Suponhamos então que $X \neq \emptyset$.

Se $a \in \mathbb{R} \setminus \overline{X}$, então $a \notin \overline{X}$. Daí existe $\epsilon > 0$ tal que $(a - \epsilon, a + \epsilon) \cap X = \emptyset$, isto é, $(a - \epsilon, a + \epsilon) \subset \mathbb{R} \setminus X$. Vejamos que $(a - \epsilon, a + \epsilon) \subset \mathbb{R} \setminus \overline{X}$. De fato, fixado $c \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$, existe $\delta > 0$ tal que $(c - \delta, c + \delta) \subset (a - \epsilon, a + \epsilon)$ pois $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ é aberto. Mas $(a - \epsilon, a + \epsilon) \subset \mathbb{R} \setminus X$ e daí $(c - \delta, c + \delta) \subset \mathbb{R} \setminus X$. Isto significa que $(c - \delta, c + \delta) \cap X = \emptyset$, ou seja, $c \notin \overline{X}$. Consequentemente, $c \in \mathbb{R} \setminus \overline{X}$. Assim, $(a - \epsilon, a + \epsilon) \subset \mathbb{R} \setminus \overline{X}$. Então $\mathbb{R} \setminus \overline{X}$ é aberto donde $\overline{X}$ é fechado.

Agora, dado um subconjunto fechado F que contém X, seja $a \in \overline{X}$. Então existe uma sequência em X tal que $\lim x_n = a$. Mas $X \subset F$, de modo que existe uma sequência em F tal que $\lim x_n = a$. Daí $x \in \overline{F} = F$. Portanto, $\overline{X} \subset F$. □

Sejam X e Y subconjuntos de $\mathbb{R}$ tais que $X \subset Y$. Dizemos que X é denso em Y quando $Y \subset \overline{X}$, isto é, todo ponto de Y é limite de uma sequência em X. Equivalentemente, todo intervalo aberto que contém um ponto de Y, contém um ponto de X.

Exemplo 4.2.4. *Já sabemos que $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ são densos em $\mathbb{R}$. Porém $\mathbb{Z}$ não é denso em $\mathbb{R}$ pois $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$.*

Exemplo 4.2.5. *Os interalos abertos são densos nos intervalos fechados pois* $\overline{(a,b)} = [a,b]$.

Um fato interessante a respeito de qualquer subconjunto de $\mathbb{R}$ vem da segunite proposição a qual somente enunciaremos.

Proposição 4.2.5. *Todo subconjunto não vazio* X *de* $\mathbb{R}$ *admite um subconjunto enumerável e denso em* X.

Seja X um subconjunto de $\mathbb{R}$. Dizemos que $a \in \mathbb{R}$ é um **ponto de acumulação** de X quando $a \in \overline{X \setminus \{a\}}$, isto é, quando existe uma sequência (x_n) em $X \setminus \{a\}$ tal que $\lim x_n = a$. Da Proposição 4.2.1 vemos que $a \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação de X se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$ tem-se $(a - \epsilon, a + \epsilon) \cap (X \setminus \{a\}) \neq \emptyset$, ou seja, todo intervalo aberto que contém a, contém um outro elemento de X. O conjunto dos pontos de acumulação de X será denotado por X'. Então $a \in X'$ se, e somente se, $a \in \overline{X \setminus \{a\}}$. É claro que $X' \subset \overline{X}$.

Exemplo 4.2.6. *Claramente, temos que* $\emptyset' = \emptyset$, $\mathbb{R}' = \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$ *e* $\mathbb{Z}' = \emptyset$. *Mais ainda,* $(a,b)' = [a,b]$.

Exemplo 4.2.7. *Se* $X = \{\frac{1}{n}\,;\, n \in \mathbb{N}\}$, *então* $X' = \{0\}$.

Proposição 4.2.6. *Seja* X *um subconjunto não vazio de* $\mathbb{R}$. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $a \in X'$;

(b) existe uma sequência (x_n) *em* X *tal que* $x_n \neq x_m$ *para todos* $n \neq m$ *e* $\lim x_n = a$;

(c) para todo $\epsilon > 0$, *o conjunto* $(a - \epsilon, a + \epsilon) \cap X$ *é infinito.*

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b)

Se $a \in X'$, então para todo $\epsilon > 0$, $(a - \epsilon, a + \epsilon) \cap (X \setminus \{a\}) \neq \emptyset$, ou seja, existe $x_\epsilon \in X$ tal que $0 < |x_\epsilon - a| < \epsilon$. Em particular, para

$\epsilon = 1$, existe $x_1 \in X$ tal que $|x_1 - a| < 1$;

$\epsilon = \text{mín}\{\frac{1}{2}, |x_1 - a|\}$, existe $x_2 \in X$ tal que $|x_2 - a| < \frac{1}{2}$ e $x_2 \neq x_1$;

$\epsilon = \text{mín}\{\frac{1}{3}, |x_2 - a|\}$, existe $x_3 \in X$ tal que $|x_3 - a| < \frac{1}{3}$, $x_3 \neq x_2$ e $x_3 \neq x_1$;

Continuando com este processo, construímos uma sequência (x_n) em X tal que $x_n \neq x_m$ para todos $n \neq m$ e $\lim x_n = a$.

(b) $\Rightarrow$ (c)

Seja $\epsilon > 0$. Por hiptóse, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$. Ou seja, $\{x_n\,;\, n \geq n_0\} \subset (a - \epsilon, a + \epsilon) \cap X$. Mas $x_n \neq x_m$ para todos $n \neq m$, de modo que o conjunto $\{x_n\,;\, n \geq n_0\}$ é infinito e, portanto, $(a - \epsilon, a + \epsilon) \cap X$ é infinito.

(c) $\Rightarrow$ (a)

Se $a \notin X'$, então existe $\epsilon > 0$ tal que $(a-\epsilon, a+\epsilon) \cap (X \setminus \{a\}) = \emptyset$. Disto segue que o conjunto $(a-\epsilon, a+\epsilon) \cap X$ é finito, o que contradiz a hipótese. □

Corolário 4.2.1. *Seja X um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$. Se $X' \neq \emptyset$, então X é infinito.*

Demonstração. Suponhamos que $X' \neq \emptyset$. Então dado $a \in X'$, pela proposição anterior temos que $(a-1, a+1) \cap X$ é um conjunto infinito e, portanto, X é infinito. □

Proposição 4.2.7. *Se X é um subconjunto de $\mathbb{R}$, então $\overline{X} = X \cup X'$.*

Demonstração. A afirmação é clara se $X = \emptyset$. Vejamos o caso em que $X \neq \emptyset$.

Como $X \subset \overline{X}$ e $X' \subset \overline{X}$ temos $X \cup X' \subset \overline{X}$. Por outro lado, dado $a \in \overline{X}$ e fixado $\epsilon > 0$, temos $(a-\epsilon, a+\epsilon) \cap X \neq \emptyset$. Vejamos que $a \in X$ ou $a \in X'$. De fato, se $a \in X$, então $a \in X \cup X'$. Mas se $a \notin X$, então $a \notin (a-\epsilon, a+\epsilon) \cap X$. Daí $(a-\epsilon, a+\epsilon) \cap (X \setminus \{a\}) = (a-\epsilon, a+\epsilon) \cap X \neq \emptyset$. Como isto vale para todo $\epsilon > 0$, segue que $a \in \overline{X \setminus \{a\}}$, isto é, $a \in X'$. Assim $a \in X \cup X'$. Portanto $\overline{X} \subset X \cup X'$. □

Usando a definição de conjunto fechado e a proposição anterior segue o seguinte

Corolário 4.2.2. *Seja X um subconjunto de $\mathbb{R}$. Então X é fechado se, e somente se, $X' \subset X$.*

A próxima proposição é vista como uma versão do Teorema de Bolzano-Weierstrass para pontos de acumulação.

Proposição 4.2.8. *(Teorema de Bolzano-Weierstrass) Se X é um subconjunto infinito e limitado de $\mathbb{R}$, então $X' \neq \emptyset$. Noutras palavras, todo subconjunto infinito e limitado de $\mathbb{R}$ admite um ponto de acumulação.*

Demonstração. Sabemos que existe $E \subset X$ infinito e enumerável. Então $E = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ onde os x_n são distintos. Desta forma temos uma sequência (x_n) em X de termos distintos. Mais ainda, esta sequência é limitada pois X é limitado. Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, passando a uma subsequência se necessário, podemos admitir que (x_n) é convergente. Seja $\lim x_n = a$. Como os termos x_n são distintos, no máximo um deles pode ser igual a a. Descartando-o, caso exista, obtemos uma sequência de termos distintos em $X \setminus \{a\}$ tal que $\lim x_n = a$, isto é, $a \in X'$. □

Seja X um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$. Dizemos que $a \in X$ é um **ponto isolado** de X quando a não é um ponto de acumulação de X, ou seja, quando existe $\epsilon > 0$ tal que $(a-\epsilon, a+\epsilon) \cap X = \{a\}$.

Por exemplo, todo número inteiro é um ponto isolado de $\mathbb{Z}$ mas não é um ponto isolado de $\mathbb{Q}$.

A próxima proposição, que apenas enunciaremos, relaciona os conjuntos formados por somente pontos isolados.

Proposição 4.2.9. *Seja X um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$. Se todos os pontos de X são isolados em X, então X é enumerável.*

4.3 Conjuntos Compactos

Seja X um subconjunto de $\mathbb{R}$. Dizemos que X é um **compacto** quando X é fechado e limitado.

Como exemplos temos que $\emptyset$, $[a, b]$ e todo conjunto finito são compactos. Por outro lado, $\mathbb{R}$, $[a, +\infty)$, (a, b) e $\mathbb{Z}$ não são compactos.

A proposição a seguir caracteriza os conjuntos compactos de forma sequencial.

Proposição 4.3.1. *Seja X um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$. Então X é compacto se, e somente se, toda sequência de pontos em X tem uma subsequência convergente em X.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja (x_n) uma sequência em X. Como X é limitado, pois é compacto, a sequência (x_n) é limitada e, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, existem (x_{n_k}) uma subsequência de (x_n) e $a \in \mathbb{R}$ tais que $\lim x_{n_k} = a$. Mas $x_{n_k} \in X$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e daí $a \in \overline{X}$. Mas X é fechado, pois é compacto, e então $a \in X$.

($\Leftarrow$) Vejamos que X é fechado. Para isso, seja $a\overline{X}$. Então existe uma sequência (x_n) em X tal que $\lim x_n = a$. Por hipótese, existe uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n) que converge em X. Mas $\lim x_{n_k} = \lim x_n = a$ e, portanto, $a \in X$. Logo $\overline{X} \subset X$ e daí X é fechado.

Agora, mostraremos que X é limitado. Suponhamos, por absurdo, que X não é limitado. Isto significa que para todo $c \in \mathbb{R}$, existe $x_c \in X$ tal que $|x_c| > c$. Em particular, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in X$ tal que $|x_n| > n$. Mas se (x_{n_k}) é uma subsequência de (x_n), então $|x_{n_k}| > n_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e daí $\lim x_{n_k} = +\infty$. Assim, toda subsequência de (x_n) é divergente, o que contradiz a hipótese. Logo X é limitado. $\square$

Proposição 4.3.2. *Seja (K_n) uma sequência de conjuntos compactos e não vazios de $\mathbb{R}$ tais que $K_n \subset K_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então $\cap_{n \in \mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência em $\mathbb{R}$ onde $x_n \in K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $K_n \subset K_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que (x_n) é uma sequência no compacto K_1 e daí existe uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n) tal que $\lim x_{n_k} = a \in K_1$. Vejamos que $a \in \cap_{n \in \mathbb{N}} K_n$. Seja $n \in \mathbb{N}$. Como (n_k) é crescente, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \leq n_k$ para todo $k \geq K$. Logo $K_{n_k} \subset K_n$ para todo $k \geq N$. Assim $x_{n_k} \in K_n$ para todo $k \geq N$ e como K_n é fechado, pois é compacto, $\lim x_{n_k} = a \in K_n$. Logo $a \in K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é, $a \in \cap_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Ou seja, $\cap_{n\in\mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$. $\square$

5

Funções Reais

5.1 Limites

Sejam X um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$, $a \in X'$ e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que $L \in \mathbb{R}$ é **limite** de $f(x)$ quando x tende para a, e denotamos $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, quando para toda sequência (x_n) em $X \setminus \{a\}$ tal que $\lim x_n = a$ temos $\lim f(x_n) = L$.

As próximas proposições, cujas demonstrações serão omitidas, segue direto das propriedades de limite de sequências junto com a definição de limite de funções.

Proposição 5.1.1. *(Unicidade do Limite) Sejam X um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$, $a \in X'$ e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x) = M$, então $L = M$.*

Proposição 5.1.2. *Sejam X um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$, $a \in X'$ e $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funções tais que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$. Se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X \setminus \{a\}$, então $L \leq M$. Em particular, se $f(x) \leq M$ para todo $x \in X \setminus \{a\}$, então $L \leq M$.*

Proposição 5.1.3. *(Teorema do Sanduíche) Sejam X um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$, $a \in X'$ e $f, g, h : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funções tais que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo $x \in X \setminus \{a\}$. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = L$, então $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$.*

Proposição 5.1.4. *Sejam X um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$, $a \in X'$ e $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funções. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ e g é limitada em $X \setminus \{a\}$, então $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = 0$.*

Proposição 5.1.5. *Sejam X um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$, $a \in X'$ e $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funções. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$, então*

(a) $\lim\limits_{x\to a} (f(x) + g(x)) = L + M$;

(b) $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = LM$;

(c) $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ *desde que* $g(x) \neq 0$ *para todo* $x \in X \setminus \{a\}$.

A próxima proposição nos mostra uma definição equivalente de limite de uma sequência, através de intervalos aberto.

Proposição 5.1.6. *Sejam* X *um subconjunto não vazio de* $\mathbb{R}$, $a \in X'$ *e* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $\lim_{x \to a} f(x) = L$;

(b) *para todo* $\epsilon > 0$, *existe* $\delta > 0$ *tal que se* $x \in X$ *e* $0 < |x - a| < \delta$, *então* $|f(x) - L| < \epsilon$.

Demonstração. Vejamos que $(b) \Leftarrow (a)$. Seja (x_n) uma sequência em $X \setminus \{a\}$ tal que $\lim x_n = a$. Vamos mostrar que $\lim f(x_n) = L$. Fixe $\epsilon > 0$. Por (b), existe $\delta > 0$ tal que se $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta$, então $|f(x) - L| < \epsilon$. Como $x_n \neq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim x_n = a$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 < |x_n - a| < \delta$ para todo $n \geq n_0$. Daí $|f(x_n) - L| < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$. Portanto, $\lim f(x_n) = L$. Assim vale (a).

Façamos agora $(a) \Rightarrow (b)$. Suponhamos que (b) seja falso. Logo existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$, existe $x_\delta \in X$ com $0 < |x_\delta - a| < \delta$ e $|f(x_\delta) - L| \geq \epsilon$. Fixado $n \in \mathbb{N}$, tomando $\delta = \frac{1}{n}$, existe $x_n \in X$ com $0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$ e $|f(x_n) - L| \geq \epsilon$. Assim, construímos uma sequência (x_n) em $X \setminus \{a\}$ tal que $\lim x_n = a$ mas $\lim f(x_n) \neq L$. Portanto (a) é falso. $\square$

Note que (b) implica em: para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$f((a - \delta, a + \delta) \cap (X \setminus \{a\}) \subset (L - \epsilon, L + \epsilon).$$

Observe que é essencial, na definição de limite de funções reais, supor que $a \in X'$. Caso contrário, o limite não seria único. De fato, se $a \notin X'$, então existe $\delta_0 > 0$ tal que $(a - \delta_0, a + \delta_0) \cap (X \setminus \{a\}) = \emptyset$ e daí

$$f((a - \delta_0, a + \delta_0) \cap (X \setminus \{a\})) = \emptyset.$$

Assim, dado $L \in \mathbb{R}$ e $\epsilon > 0$, temos

$$f((a - \delta_0, a + \delta_0) \cap (X \setminus \{a\})) \subset (L - \epsilon, L + \epsilon).$$

Isto é, $\lim_{x \to a} f(x) = L$ para todo $L \in \mathbb{R}$.

Proposição 5.1.7. *Sejam* X *um subconjunto não vazio de* $\mathbb{R}$, $a \in X'$ *e* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função. Se* $\lim_{x \to a} f(x) = L$, *então existem* $M > 0$ *e* $\delta > 0$ *tais que* $|f(x)| < M$ *para todo* $x \in (a - \delta, a + \delta) \cap (X \setminus \{a\})$.

Demonstração. Tomando $\epsilon = 1$, por hipótese, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta$, então $|f(x) - L| < 1$. Pela Desigualdade Triangular, $|f(x)| < |L| + 1$ e tomando $M = |L| + 1$, temos $|f(x)| < M$ para todo $x \in (a - \delta, a + \delta) \cap (X \setminus \{a\})$. $\square$

Exemplo 5.1.1. *Fixados a e c em $\mathbb{R}$, é claro que se $f(x) = c$ e $g(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = a$. Segue das propriedades de limites que se p é um polinômio, então $\lim\limits_{x\to a} p(x) = p(a)$ e que se $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ é uma função racional com $q(a) \neq 0$, então $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{p(x)}{q(x)} = \dfrac{p(a)}{q(a)}$. O que acontece com $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{p(x)}{q(x)}$ quando $q(a) = 0$?*

Exemplo 5.1.2. *Seja $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Temos $0 \in X'$. Seja $f(x) = sen\left(\dfrac{1}{x}\right)$ para todo $x \in X$. Considerando $x_n = \dfrac{2}{(2n-1)\pi}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $\lim x_n = 0$ mas $f(x_{2n+1}) = 1$ e $f(x_{2n}) = -1$ de modo que $(f(x_n))$ é divergente. Portanto não existe $\underset{x\to 0}{f(x)}$. Por outro lado, se $g(x) = x$ para todo $x \in X$, então $\underset{x\to 0}{f(x)g(x)} = 0$.*

Exemplo 5.1.3. *A função $f(x) = 0$ se $x \in \mathbb{Q}$ e 1 se $x \notin \mathbb{Q}$ não tem limite em nenhum ponto de $\mathbb{R}$. Com efeito, se $a \in \mathbb{R}$, sabemos que existem sequências (x_n) e (y_n) em $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, respectivamente, tais que $x_n \neq a$ e $y_n \neq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$ mas $\lim x_n = \lim y_n = a$. Por outro lado, $\lim f(x_n) = 0$ e $\lim f(y_n) = 1$.*

5.2 Limites Laterais

Sejam X um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ e $a \in X$. Dizemos que a é um **ponto de acumulação à direita** de X quando existe uma sequência (x_n) tal que $a < x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim x_n = a$. Analogamente, dizemos que a é um **ponto de acumulação à esquerda** de X quando existe uma sequência (x_n) tal que $x_n < a$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim x_n = a$. Denotaremos por X'_+ e X'_- o conjunto dos pontos de acumulação à direita e à esquerda, respectivamente. Equivalentemente, temos as seguintes definições:

$$a \in X'_+ \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, (a, a + \epsilon) \cap X \neq \emptyset$$

e

$$a \in X'_- \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, (a - \epsilon, a) \cap X \neq \emptyset.$$

Por exemplo, se X é o intervalo aberto limitado (a, b), temos $a \in X'_+$ e $b \in X'_-$ mas $a \notin X'_-$ e $b \notin X'_+$. Agora se $X = \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$, então $0 \in X'_+$ mas $0 \notin X'_-$.

Sejam X um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$, $a \in X'_+$ e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x se aproxima à direita de a é igual a $L \in \mathbb{R}$, e denotamos $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$, quando para toda sequência (x_n) em X com $a < x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim x_n = a$ tem-se $\lim f(x_n) = L$. Analogamente, se $a \in X'_-$, dizemos que o limite de $f(x)$ quando x se aproxima à esquerda de a é igual a $L \in \mathbb{R}$, e denotamos $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$, quando para toda sequência (x_n) em X com $x_n < a$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim x_n = a$ tem-se $\lim f(x_n) = L$.

As demonstrações das propriedades gerais dos limites da seção 5.1 se adaptam facilmente para os limites laterais. Em particular vale o seguinte resultado:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; \forall x \in (a, a + \delta) \cap X \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon)$$

e

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; \forall x \in (a - \delta, a) \cap X \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon) \,.$$

Vale ainda o seguinte resultado, cuja demonstração fica como exercício.

Proposição 5.2.1. *Sejam X um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$, $a \in X'_+ \cap X'_-$ e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Então $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ se, e somente se, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$.*

Demonstração. Exercício. □

5.3 Funções Contínuas

Sejam X um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$, $a \in X$ e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é **contínua** em a quando para toda sequência (x_n) em X tal que $\lim x_n = a$ temos $\lim f(x_n) = f(a)$. Equivalentemente, f é contínua em a se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in X$ e $|x - a| < \delta$, então $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. De outra forma, dizemos que f é contínua em a quando para todo intervalo J contendo $f(a)$, existe um intervalo I contendo a tal que $f(I \cap X) \subset J$. Dizemos que f é contínua em X quando f é contínua em todos os pontos de X. Quando f não é contínua em a, dizemos que f é **descontínua** em a.

Proposição 5.3.1. *Sejam X um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$, $a \in X$ e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função.*

(a) Se $a \in X'$, então f é contínua em a se, e somente se, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$;

(b) Se a é um ponto isolado de X, então f é contínua em a.

Demonstração. Exercício. □

Todas as propriedades de limites provadas na seção 5.1, também são válidas para funções contínuas. Em particular, a soma, o produto e o quociente de funções contínuas são também funções contínuas em seus domínios. Mais ainda, polinômios e funções racionais são funções contínuas em seu domínio.

Exemplo 5.3.1. *A função definida por* $f(x) = x \, sen\left(\frac{1}{x}\right)$ *se* $x \neq 0$ *e* $f(0) = 0$*, é uma função contínua em* $\mathbb{R}$*.*

Exemplo 5.3.2. *Defina* $f(x) = 0$ *se* $x \in \mathbb{Q}$ *e* $f(x) = 1$*, caso contrário. Então* f *é descontínua em todo ponto de* $\mathbb{R}$*.*

Proposição 5.3.2. *Sejam* X *um subconjunto não vazio de* $\mathbb{R}$ *e* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função contínua em* $a \in X$*. Valem as seguintes afirmações:*

(a) se $f(a) > 0$*, então existe* $\delta > 0$ *tal que* $f(x) > 0$ *para todo* $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap X$*;*

(b) se $f(a) < 0$*, então existe* $\delta > 0$ *tal que* $f(x) < 0$ *para todo* $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap X$*;*

Demonstração. Exercício. □

A composta de funções contínuas também é uma função contínua em seu domínio, como veremos a seguir:

Proposição 5.3.3. *Sejam* X *e* Y *subconjuntos não vazios de* $\mathbb{R}$*. Sejam* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *e* $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ *tais que* $f(X) \subset Y$*. Se* f *é contínua em* $a \in X$ *e* g *é contínua em* $f(a)$*, então a função composta* $g \circ f$ *é contínua em* a*.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência em X tal que $\lim x_n = a$. Pela continuidade de f em a, segue que $\lim f(x_n) = f(a)$. Mas $(f(x_n))$ é uma sequência em Y e como g é contínua em $f(a)$ obtemos $\lim g(f(x_n)) = g(f(a))$. Ou seja, $\lim (g \circ f)(x_n) = (g \circ f)(a)$. Isto mostra que $g \circ f$ é contínua em a. □

Teorema 5.3.1. *Uma função* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *é contínua em* $\mathbb{R}$ *se, e somente se,* $f^{-1}(A)$ *é um conjunto aberto para todo aberto* A *de* $\mathbb{R}$*.*

Demonstração. Seja A um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$. Se $f^{-1}(A) = \emptyset$, então é claro que $f^{-1}(A)$ é aberto. Suponhamos que $f^{-1}(A) \neq \emptyset$ e fixemos $a \in f^{-1}(A)$. Então $f(a) \in A$. Como A é aberto, existe $\epsilon > 0$ tal que $(f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon) \subset A$. Pela continuidade de f em a, existe $\delta > 0$ de modo que

$$f((a-\delta, a+\delta)) \subset (f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon) \subset A.$$

Ou seja, $(a - \delta, a + \delta) \subset f^{-1}(A)$. Portanto, $f^{-1}(A)$ é um aberto. Reciprocamente, dado $\epsilon > 0$, como $(f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon)$ é um aberto, por hipótese, $f^{-1}((f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon))$ é um aberto. Portanto, existe $\delta > 0$ tal que $(a-\delta, a+\delta) \subset f^{-1}((f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon))$, isto é, $f((a-\delta, a+\delta)) \subset (f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon)$. Isto mostra que f é contínua em a e, portanto, f é contínua em $\mathbb{R}$. □

Corolário 5.3.1. *Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $\mathbb{R}$ se, e somente se, $f^{-1}(F)$ é um conjunto fechado para todo fechado F de $\mathbb{R}$.*

Teorema 5.3.2. *Seja X um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em X. Se X é compacto, então $f(X)$ é compacto.*

Demonstração. Seja (y_n) uma sequência em $f(X)$. Então existe uma sequência (x_n) em X tal que $y_n = f(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mas como X é compacto, existem uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n) e $a \in X$ tal que $\lim x_{n_k} = a$. Pela continuidade de f em X e $a \in X$, segue que $\lim f(x_{n_k}) = f(a)$. Assim (y_{n_k}) é uma subsequência de (y_n) tal que $\lim y_{n_k} = f(a) \in f(X)$. Mostramos então que toda seguência em $f(X)$ admite uma subsequência convergente em $f(X)$, isto é, que $f(X)$ é compacto. □

Corolário 5.3.2. *Seja X um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em X. Se X é compacto, então existem $a, b \in X$ tais que $f(a) = \inf f(X)$ e $f(b) = \sup f(X)$.*

Demonstração. Como $f(X)$ é compacto, em particular, é limitado, de modo que $\inf f(X)$ e $\sup f(X)$ existem em $\mathbb{R}$. Além disso, $f(X)$ é fechado e daí $\inf f(X), \sup f(X) \in f(X)$. Portanto, existem $a, b \in X$ tais que $f(a) = \inf f(X)$ e $f(b) = \sup f(X)$. □

Corolário 5.3.3. *Seja X é um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função bijetiva. Se X é compacto e f é contínua em X, então sua inversa $f^{-1} : f(X) \longrightarrow X$ é contínua em $f(X)$.*

Demonstração. Exercício. □

Teorema 5.3.3. *(Teorema do Valor Intermediário) Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$. Se d é um número real que está entre $f(a)$ e $f(b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.*

Demonstração. Provaremos o caso em que $f(a) < d < f(b)$. O outro caso é análogo.

Note que o conjunto $A = \{x \in [a, b]\,;\, f(x) \leq d\}$ é não vazio, pois $a \in A$, e limitado. Portanto, $c = \sup A \in \mathbb{R}$. Na verdade, $c \in [a, b]$. Assim $f(c) \leq d$. Vejamos que $f(c) = d$. Suponhamos, por absurdo, que $f(c) < d$. Como f é contínua em c, tomando $\epsilon_0 = d - f(c) > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in (c-\delta, c+\delta) \cap [a, b]$ temos $|f(x) - f(c)| < \epsilon_0$, isto é, $f(x) < f(c) + \epsilon_0 = d$. Mas se $x_0 \in (c, c+\delta) \cap [a, b]$ temos $f(x_0) < d$ donde $x_0 \in A$ e isto contradiz o fato de $c = \sup A$. Portanto, $f(c) = d$. Segue daí que $a < c < b$. □

Como consequência do Teorema do Valor Intermediário, é possível provar os seguintes resultados, cujas demonstrações serão omitidas.

Corolário 5.3.4. *Seja I um intervalo de $\mathbb{R}$ e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Se f é contínua em I, então $f(I)$ é um intervalo de $\mathbb{R}$.*

Corolário 5.3.5. *Sejam I um intervalo de $\mathbb{R}$ e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função injetiva. Se f é contínua em I, então f é monótona (isto é, estritamente crescente ou decrescente) e sua inversa $f^{-1} : f(I) \longrightarrow I$ é uma função contínua em $f(I)$.*

5.4 Continuidade Uniforme

Seja X um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$. Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita **uniformemente contínua** em X quando para todo par de sequências (x_n),(y_n) em X com $\lim(x_n - y_n) = 0$ tem-se $\lim(f(x_n) - f(y_n)) = 0$.

Exemplo 5.4.1. *A função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1$ se $x > 0$ e $f(x) = -1$ se $x < 0$ não é uniformemente contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.*

Exemplo 5.4.2. *Seja $f(x) = \dfrac{1}{x}$ para todo $x > 0$. Embora f seja contínua em $(0, +\infty)$, esta função não é uniformemente contínua em $(0, +\infty)$ pois tomando $x_n = \frac{1}{2n}$ e $y_n = \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $\lim(x_n - y_n) = 0$ mas $\lim(f(x_n) - f(y_n)) = +\infty$. Portanto, nem toda função contínua é uniformemente contínua.*

Exemplo 5.4.3. *Seja $X \subset \mathbb{R}$ não vazio. Um função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita Lipschitziana em X quando existe $k > 0$ satisfazendo*

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y| \tag{5.1}$$

para todos $x, y \in X$. É claro que toda função Lipschitziana em X é uniformemente contínua em X. Em particular, a função afim $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$ é Lipschitziana e, portanto, uniformemente contínua em $\mathbb{R}$.

Exemplo 5.4.4. *Vimos no exemplo 5.4.2 que a função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ não é uniformemente contínua em $(0, +\infty)$ mas f é uniformemente contínua em todo intervalo da forma $[a, +\infty)$ com $a > 0$. De fato, f é uma função Lipschitziana em $[a, +\infty)$ com constante $k = \frac{1}{a^2}$.*

Proposição 5.4.1. *Seja X um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$. A fim de que a função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ seja uniformemente contínua em X é necessário e suficiente que para todo $\epsilon > 0$, exista $\delta > 0$ tal que se $x, y \in X$ e $|x - y| < \delta$, então $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.*

Demonstração. Sejam (x_n) e (y_n) sequências em X tais que $\lim(x_n - y_n) = 0$. Vamos mostrar que $\lim(f(x_n) - f(y_n)) = 0$. De fato, seja $\epsilon > 0$. Por hipótese, existe $\delta > 0$ tal que se $x, y \in X$ e $|x - y| < \delta$, então $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Mas $\lim(x_n - y_n) = 0$ e daí existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - y_n| < \delta$ para todo $n \geq n_0$. Portanto, $|f(x_n) - f(y_n)| < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$. Ou seja, $\lim(f(x_n) - f(y_n)) = 0$.

Reciprocamente, suponhamos que exista $\epsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$, existem $x_\delta, y_\delta \in X$ com $|x_\delta - y_\delta| < \delta$ mas $|f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \epsilon$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, tomando $\delta = 1/n$, construímos sequências (x_n) e (y_n) em X com $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ mas $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$. Desta forma $\lim(x_n - y_n) = 0$ mas $\lim(f(x_n) - f(y_n)) \neq 0$. Portanto, f não é uniformemente contínua em X. □

A proposição anterior nos mostra de maneira clara que toda função uniformemente contínua é uma função contínua.

Proposição 5.4.2. *Sejam X um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em X. Se X é compacto, então f é uniformemente contínua em X.*

Demonstração. Suponhamos que f não seja uniformemente contínua em X. Daí existem sequências (x_n) e (y_n) em X satisfazendo $\lim(x_n - y_n) = 0$ mas $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$ para algum $\epsilon > 0$. Como $(y_n) \subset X$ e X é compacto, passando a uma subsequência, se necessário, podemos supor que $\lim y_n = a \in X$. Mais ainda, $\lim x_n = a$ já que $x_n = x_n - y_n + y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pela continuidade de f em X, segue que f é contínua em $a \in X$, de modo que $\lim f(x_n) = \lim f(y_n) = f(a)$ e daí $\lim(f(x_n) - f(y_n)) = 0$ e isto contradiz o fato de que $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$. Portanto, f é uniformemente contínua em X. □

Proposição 5.4.3. *Sejam X um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função uniformemente contínua em X. Se X é limitado, então f é limitada em X.*

Demonstração. Se f não fosse limitada (digamos superiormente), existiria uma sequência (x_n) em X tal que $f(x_{n+1}) > f(x_n) + 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pela hipótese de X ser limitado, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, passando a uma subsequência se necessário, podemos supor que $\lim x_n = a \in \mathbb{R}$. Sendo $y_n = x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $\lim(y_n - x_n) = 0$ mas $f(y_n) - f(x_n) > 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ donde $\lim(f(y_n) - f(x_n)) \neq 0$ e isto contradiz o fato de f ser uniformemente contínua em X. □