Análise I – Lista 5

Alex Farah Pereira

novembro/17

Exercícios da Seção 5.1: Limites

1. Demonstre as Proposições 5.1.1 a 5.1.5.

2. Sejam X um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$, $a \in X'$, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e $Y = f(X \setminus \{a\})$. Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, mostre que $L \in \overline{Y}$.

Exercícios da Seção 5.2: Limites Laterais

1. Demosntre a Proposição 5.2.1.

Exercícios da Seção 5.3: Funções Contínuas

1. Demonstre as Proposições 5.3.1 e 5.3.2.

2. Demonstre o Corolário 5.3.1.

3. Sejam X um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ e $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas em X. Prove que se X é fechado, então o conjunto $F = \{x \in X \,;\, f(x) = g(x)\}$ é fechado.

4. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que se $f(x) = 0$ para todo $x \in X$, então $f(x) = 0$ para todo $x \in \overline{X}$.

5. Prove que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua se, e somente se, $f(\overline{X}) \subset \overline{f(X)}$ para todo $X \subset \mathbb{R}$.

6. Demonstre o Corolário 5.3.3. (dica: seja $a \in X$ e $b = f(a) \in f(X)$. Devemos mostrar que f^{-1} é contínua em b. Suponhamos, por absurdo, que f^{-1} não é contínua em b. Construa uma sequência $y_n = f(x_n)$, $x_n \in X$ tal que $\lim y_n = b$ mas $|f^{-1}(y_n) - f^{-1}(b)| \geq \epsilon$ para algum $\epsilon > 0$. Disto segue que $|x_n - a| \geq \epsilon$. Usando a compacidade de X, podemos supor que $\lim x_n = a' \in X$. Daí $|a - a'| \geq \epsilon$, ou seja $a' \neq a$. Por outro lado, usando a continuidade de f, mostre que $f(a') = f(a)$! Isto contradiz o fato de f ser injetiva pois é uma bijeção).

7. Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$ tal que $f(a) \leq a \leq b \leq f(b)$. Prove que existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c$ (dica: aplique o Teorema do Valor Intermediário para a função $g(x) = x - f(x)$ para todo $x \in [a, b]$).

Exercícios da Seção 5.4: Continuidade Uniforme

1. Mostre que a função $f(x) = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$ é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$.

2. Verifique que a função $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ não é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$.

3. Sejam X um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ e $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Se f e g são uniformemente contínuas em X, prove que

   (a) $f + g$ é uniformemente contínua em X;

   (b) fg é uniformemente contínua em X desde que f e g sejam limitadas em X.