Análise I – Lista 3

Alex Farah Pereira

outubro/17

Exercícios da Seção 3.1: Limites de Sequências

1. Prove a Proposição 3.1.2.
2. Seja k um número real positivo. Prove que (x_n) converge para L se, e somente se, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - L| \leq k\epsilon$ para todo $n \geq n_0$.
3. Seja (x_n) uma sequência decrescente e limitada inferiormente. Mostre que $\lim x_n = \inf\{x_n \, ; \, n \in \mathbb{N}\}$.
4. Demonstre a Proposição 3.1.8.
5. Prove a Proposição 3.1.9.
6. Calcule o limite da sequência (x_n) cujo termo geral é

$$x_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$$

   para todo $n \in \mathbb{N}$.
7. Sejam (x_n) e (y_n) sequências tais que $\lim\, x_n = L$ e $\lim\,(x_n - y_n) = 0$. Mostre que $\lim\, y_n = L$.
8. Seja (t_n) uma sequência limitada. Se $\lim x_n = \lim y_n = L$, prove que $\lim(t_n x_n + (1 - t_n)y_n) = L$.
9. Mostre que
   (a) $\lim(\sqrt[n]{n} - 1)^n = 0$;
   (b) $\lim \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n}{n^2} \right) = \frac{1}{2}$.
10. Seja (x_n) uma sequência tal que $\lim\, x_n = L$. Defina $y_n = \dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Prove que $\lim\, y_n = L$.

Exercícios da Seção 3.2: Subsequência de uma Sequência

1. Prove a Proposição 3.2.2.
2. Seja (x_n) uma sequência tal que $\lim\, x_{2n} = L$ e $\lim\, x_{2n-1} = L$. Mostre que $\lim\, x_n = L$.
3. Seja (x_n) uma sequência limitada. Seja (a_n) uma sequência onde cada a_n é um valor de aderência de (x_n). Prove que se $\lim\, a_n = a$, então a é um valor de aderência de (x_n).
4. Seja (x_n) uma sequência monótona. Prove que se (x_n) tem uma subsequência limitada, então (x_n) é limitada. Conclua que se (x_n) tem uma subsequência convergente, então (x_n) é convergente.

Exercícios da Seção 3.3: Limite Superior e Limite Inferior

1. Seja (x_n) uma sequência limitada. Prove que $\limsup\, x_n$ é um valor de aderência de (x_n).
2. Sejam (x_n) uma sequência limitada, $a = \liminf\, x_n$ e $b = \limsup\, x_n$. Mostre que
   (a) para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \epsilon < x_n$ para todo $n \geq n_0$;
   (b) para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n < b + \epsilon$ para todo $n \geq n_0$;
   (c) para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \epsilon < x_n < b + \epsilon$ para todo $n \geq n_0$.

Exercícios da Seção 3.4: Sequências de Cauchy

1. Seja $c \in (0,1)$ e (x_n) uma sequência tal que

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq c|x_{n+1} - x_n|$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostre que (x_n) é uma sequência de Cauchy. Conclua que (x_n) é convergente.

2. Seja $x_1 = 1$ e $x_{n+1} = \dfrac{1}{x_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Verifique que

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|x_{n+1} - x_n|$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Conclua que (x_n) é convergente e determine seu limite.

Exercícios da Seção 3.5: Limites Infinitos

1. Demonstre a Proposição 3.5.1.

2. Prove que $\lim \sqrt[n]{n!} = +\infty$.

3. Sejam (x_n) uma sequência arbitrária e (y_n) uma sequência crescente tal que $\lim y_n = +\infty$. Se $\lim \dfrac{(x_{n+1} - x_n)}{(y_{n+1} - y_n)} = a$, mostre que $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = a$. Conclua que se $\lim(x_{n+1} - x_n) = a$, então $\lim \dfrac{x_n}{n} = a$