Análise I – Lista 2

Alex Farah Pereira

setembro/17

Exercícios da Seção 2.1: Corpo

1. Prove as afirmações $(i) - (vi)$ feitas nas páginas 8 e 9.
2. Sejam K um corpo e $x, y \in K$. Mostre que
   (a) $0.x = 0$;
   (b) se $x \neq 0$ e $y \neq 0$, então $x.y \neq 0$;
   (c) $(-x).y = x.(-y) = -(x.y)$ e $(-x).(-y) = x.y$;
   (d) se $x^2 = y^2$, então $x = y$ ou $x = -y$.

Exercícios da Seção 2.2: Corpo Ordenado

1. Prove a Proposição 2.2.2.
2. Se K é um corpo ordenado e $x, y \in K$ são tais que $0 < x < y$, mostre que $0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$.
3. Prove a Proposição 2.2.3.
4. Sejam K um corpo ordenado, $n \in \mathbb{N}$ e $x \in K$ tal que $-1 < x$. Prove a *Desigualdade de Bernoulli*:
   $$(1 + x)^n \geq 1 + n.x.$$
   Sugestão: use o princípio da indução!
5. Sejam K um corpo ordenado e $a, b \in K$. Prove que se para todo $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$ temos $a \leq b + \epsilon$, então $a \leq b$. Prove que este mesmo resultado vale quando $a < b + \epsilon$. Dê um exemplo porque não podemos afirmar que $a < b$.
6. Complete a demonstração da Proposição 2.2.4.
7. Prove a Proposição 2.2.5.
8. Sejam K um corpo ordenado e $x, y \in K$. Mostre que
   (a) se $x \neq 0$, então $|x^{-1}| = |x|^{-1}$;
   (b) se $y \neq 0$, então $|x.y^{-1}| = |x||y|^{-1}$.

Exercícios da Seção 2.3: Supremo e Ínfimo

1. Prove a Proposição 2.3.3.
2. Sejam A e B subconjuntos não vazios e limitados de um corpo ordenado K. Prove que
   (a) se $A \subset B$, então $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$;
   (b) $A \cup B$ é limitado e
   $$\sup(A \cup B) = \text{máx}\{\sup A, \sup B\} \ , \ \inf(A \cup B) = \text{mín}\{\inf A, \inf B\};$$
   (c) $A + B = \{a + b\, ;\, a \in A\, ,\, b \in B\}$ é limitado e
   $$\sup(A + B) = \sup A + \sup B \ , \ \inf(A + B) = \inf A + \inf B;$$

(d) $cA = \{ca\,;\, a \in A\}$, $c \in K$ fixo, é limitado e

$$\sup(cA) = c \sup\ A \ \ , \ \ \inf(cA) = c \inf\ A \ \text{ se } \ c \geq 0,$$

$$\sup(cA) = c \inf\ A \ \ , \ \ \inf(cA) = c \sup\ A \ \text{ se } \ c \leq 0.$$

3. Determine, caso existam, o supremo e o ínfimo de cada um dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$.

   (a) $S_1 = \{x \in \mathbb{R}\,;\, x > 0\,,\, x^2 > 2\}$;

   (b) $S_2 = \left\{\dfrac{n}{n+1}\,;\, n \in \mathbb{N}\right\}$;

   (c) $S_3 = \left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\,;\, n \in \mathbb{N}\right\}$;

   (d) $S_4 = \left\{\dfrac{n-1}{n+1}\,;\, n \in \mathbb{N}\right\}$.