Análise I – Lista 1

Alex Farah Pereira

agosto/17

Exercícios da Seção 1.1: Números Naturais

1. Prove por indução:
   (a) $1^3 + 3^3 + \ldots + (2n-1)^3 = (2n^2-1)n^2,\ \forall n \in \mathbb{N}$
   (b) $1.2 + 2.3 + \ldots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$
   (c) $n^2 < 2^n,\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 5$
   (d) $n^2 < n!,\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4$
2. Dado $n \in \mathbb{N}$, prove que não existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $n < x < n+1$.
3. Vimos que o princípio da indução implica no princípio da boa ordenação. Prove , na verdade, que essas propriedades são equivalentes, isto é, que o princípio da boa ordenação implica no princípio da indução.

Obs: Podemos usar o princípio da indução para provar que uma propriedade P é válida para todo $n \geq n_0$.

Exercícios da Seção 1.2: Conjuntos Finitos e Infinitos

1. Tente provar todos os resultados desta sessão.
2. Sejam X e Y conjuntos finitos. Prove que $X \cup Y$ é finito e $\operatorname{card}(X \cup Y) = \operatorname{card} X + \operatorname{card} Y - \operatorname{card}(X \cap Y)$.
3. Dê exemplo de uma sequência de conjuntos infinitos $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ onde $X_{n+1} \subset X_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ cuja interseção $\bigcap_{n=1}^{+\infty} X_n$ seja vazia.

Exercícios da Seção 1.3: Conjuntos Enumeráveis

1. Tente provar todos os resultados desta sessão.
2. Sejam X e Y conjuntos onde Y é não enumerável. O que podemos falar a respeito da enumerabilidade do conjunto $X \cup Y$?